

Astronomie Astrophysique

Notes de lecture

Yann-Michel Niquet

Copyright © 2023 Yann-Michel Niquet

Ce document est basé sur la lecture du livre « Astronomie, Astrophysique » de Agnès Acker [1], complétée par des démonstrations, notes et applications personnelles.

Janvier 2023



Table des matières

1	Notions de base	5
1.1	Introduction et motivations	5
1.2	Equation d'état d'un gaz parfait de fermions	5
1.2.1	Modèle	5
1.2.2	Gaz classique	7
1.2.3	Gaz dégénéré	11
1.2.4	Cas général	12
1.2.5	Gaz (ultra-)relativiste	15
1.3	Gaz de photons, rayonnement du corps noir et pression de radiation	17
1.3.1	Modèle	17
1.3.2	Rayonnement du corps noir	18
1.3.3	Pression de radiation	20
1.3.4	Application : spectre, luminosité, et éclairage du Soleil	22
1.3.5	Magnitudes	23
1.4	Forces de pesanteur	24
1.4.1	Loi de la gravitation universelle	24
1.4.2	Distributions de masse de symétrie sphérique	25
1.4.3	Equilibre hydrostatique	26
1.4.4	Polytropes et masse de Chandrasekhar	27
1.5	Fusion nucléaire et nucléosynthèse	30
1.5.1	Introduction	30
1.5.2	La fusion de l'hydrogène	31
1.5.3	De l'hélium au fer	34
1.5.4	La nucléosynthèse au delà du fer	36

2	Modèle hydrostatique d'une étoile	39
2.1	Hypothèses	39
2.2	Bilan des forces	40
2.2.1	Masse moléculaire moyenne et métallicité d'une étoile	40
2.2.2	Equilibre hydrostatique	41
2.2.3	Premières estimations	41
2.3	Bilan et transfert énergétique	42
2.3.1	Conduction	42
2.3.2	Transfert radiatif	43
2.3.3	Convection	49
2.3.4	Modèles pour la puissance massique	52
2.4	Synthèse et solution des équations	54
2.4.1	Résolution numérique	55
2.4.2	Exemples	57
2.5	Discussion	63
2.5.1	La luminosité limite d'Eddington	63
2.5.2	La relation masse-luminosité	64
2.5.3	Le diagramme de Hertzsprung-Russel	66
3	Evolution des étoiles	69



1. Notions de base

1.1 Introduction et motivations

Ce chapitre introduit les notions fondamentales permettant de décrire une étoile dans l'approximation la plus simple d'équilibre hydrostatique et thermodynamique local. Cette étoile sera modélisée comme un gaz (plasma) d'électrons et de noyaux soumis à sa propre pesanteur (qui tend à l'effondrer), et à une pression de matière et de rayonnement entretenue par les réactions thermonucléaires en son coeur (qui s'oppose à cet effondrement). Le paragraphe 1.2 démontre donc les équations d'état d'un « gaz parfait » de fermions et ses limites classique et dégénérée. Le paragraphe 1.3 décrit ensuite les photons, le rayonnement du corps noir et la pression de radiation. Le paragraphe 1.4 rappelle quelques éléments sur les forces de pesanteur qui s'exercent sur l'étoile et établit les conditions d'équilibre d'une structure auto-gravitante. Enfin, le paragraphe 1.5 introduit la fusion nucléaire et la nucléosynthèse dans les étoiles. Le modèle hydrostatique de l'étoile lui-même sera décliné au chapitre 2.

1.2 Equation d'état d'un gaz parfait de fermions

1.2.1 Modèle

On considère un gaz de fermions (électrons ou noyaux...) soumis à des interactions permettant de maintenir ce gaz à l'équilibre avec un réservoir à température T et potentiel chimique μ (ensemble grand-canonique), mais néanmoins négligeables devant leur énergie cinétique (gaz « parfait »). L'Hamiltonien de chaque particule de masse m est donc :

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (1.1)$$

où $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ est l'opérateur impulsion et p_x, p_y, p_z ses composantes cartésiennes. Les états propres de cet Hamiltonien sont les ondes planes $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/\sqrt{V}$ qui ont pour énergie

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^2 \quad (1.2)$$

et pour vitesse $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k}/m$. A la limite thermodynamique¹, on peut en toute généralité assimiler le volume V occupé par le gaz à un parallélépipède de cotés $L_x \times L_y \times L_z$, auquel on applique des conditions aux limites périodiques ; le vecteur d'onde \mathbf{k} est donc quantifié :

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x ; k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y ; k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z , \quad (1.3)$$

avec $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$. A l'équilibre, chaque état est (en moyenne) occupé par $p_{\mathbf{k}} = n_s f(E_{\mathbf{k}})$ particules, où n_s la dégénérescence de spin des fermions ($n_s = 2$ pour des spins $\frac{1}{2}$), et

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}} \quad (1.4)$$

est la distribution de Fermi-Dirac, avec $\beta = 1/(kT)$. On peut ainsi calculer la valeur moyenne d'ensemble de toute observable O :

$$\langle O \rangle = n_s \sum_{n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}} O_{\mathbf{k}} f(E_{\mathbf{k}}) \approx V \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} O_{\mathbf{k}} f(E_{\mathbf{k}}), \quad (1.5)$$

où $O_{\mathbf{k}} = \langle \psi_{\mathbf{k}} | O | \psi_{\mathbf{k}} \rangle$ et $\rho_{\mathbf{k}} = n_s / (2\pi)^3$ est la densité d'états par unité de volume (spin compris) dans l'espace réciproque. Si $O_{\mathbf{k}}$ ne dépend (comme l'énergie) que de $k = |\mathbf{k}|$,

$$\langle O \rangle = 4\pi V \int_0^\infty dk \rho_k k^2 O_k f(E_k). \quad (1.6)$$

On effectue finalement le changement de variable $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ pour intégrer sur l'énergie plutôt que sur le vecteur d'onde :

$$\langle O \rangle = V \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) O(\varepsilon) f(\varepsilon), \quad (1.7)$$

avec

$$\rho(\varepsilon) = 4\pi \rho_k k^2 \frac{dk}{dE} = \frac{n_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \quad (1.8)$$

la densité d'états par unité de volume et d'énergie et $O(\varepsilon) \equiv O_{k=\sqrt{2mE}/\hbar}$. L'énergie interne moyenne du gaz est donc $[O(\varepsilon) = \varepsilon]$:

$$\langle E \rangle = V \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon) = V \frac{n_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (kT)^{5/2} F_{3/2}(\beta\mu) \quad (1.9)$$

tandis que le nombre moyen de particules dans le gaz est $[O(\varepsilon) = 1]$:

$$\langle N \rangle = V \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) = V \frac{n_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (kT)^{3/2} F_{1/2}(\beta\mu) \quad (1.10)$$

1. La limite thermodynamique est la limite $N, V \rightarrow \infty$ à $n = N/V$ constant, où le gaz pourra être caractérisé par sa température T , sa densité n , et sa pression P . Dans cette limite, les descriptions micro-canonique, canonique et grand-canonique sont équivalentes.

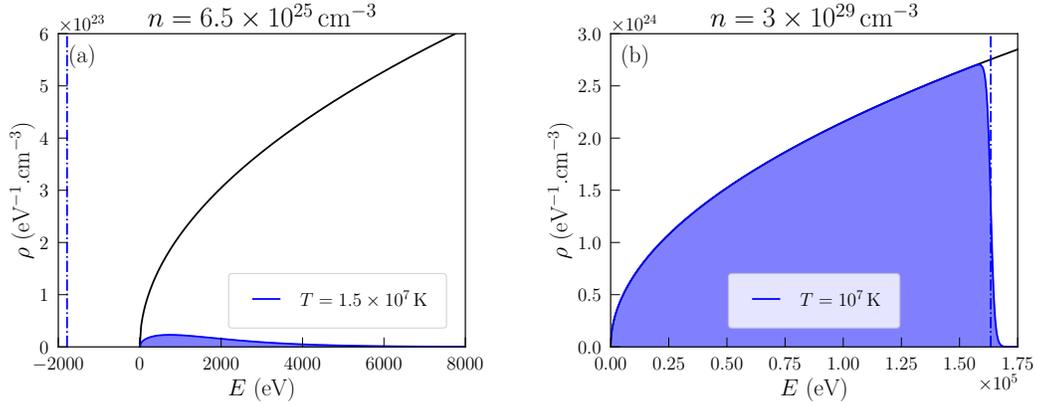


FIGURE 1.1 – Densité d'états (ligne noire) pondérée par la distribution de Fermi-Dirac (surface bleue) dans deux cas représentatifs : (a) Un gaz de $n = 6.5 \times 10^{25}$ électrons/ cm^3 à $T = 15 \times 10^6 \text{ K}$ (conditions proches du coeur du Soleil). L'occupation moyenne de chaque état reste faible, le gaz est classique; (b) Un gaz plus dense à température comparable ($n = 3 \times 10^{29}$ électrons/ cm^3 et $T = 10^7 \text{ K}$, conditions typiques d'une naine blanche). Cette fois les états sont presque pleinement occupés jusqu'au potentiel chimique (ligne verticale), malgré la température élevée. Le gaz est donc dégénéré. L'énergie cinétique des électrons au potentiel chimique dépasse 150 keV alors que kT vaut 862 eV. On pourrait tracer des figures similaires pour les noyaux, cependant beaucoup plus lourds ($m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ pour un électron et $m \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ pour un nucléon), donc moins enclins à dégénérer. Ces figures ont été tracées avec le code `distribution.py`.

où F_α est l'intégrale de Fermi :

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty dt \frac{t^\alpha}{1 + e^{(t-x)}} \quad (1.11)$$

et $\Gamma(\alpha)$ la fonction Gamma² :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty dt t^\alpha e^{-t}. \quad (1.12)$$

À la limite thermodynamique, on peut assimiler $\langle E \rangle \equiv E$ et $\langle N \rangle \equiv N$ à des grandeurs déterministes et inverser (1.10) pour calculer μ que l'on substitue dans (1.9) pour exprimer l'énergie interne en fonction de N , V et T . Les intégrales de Fermi ne sont toutefois pas analytiques en dehors des cas (heureusement pertinents!) suivants.

1.2.2 Gaz classique

Si la densité $n = N/V$ du gaz est suffisamment faible, et/ou la température T est suffisamment élevée, la distribution de Fermi-Dirac peut-être assimilée à une distribution de Maxwell-Boltzmann ($\mu \ll -kT$, voir Fig. 1.1a) :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}} \approx e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.13)$$

2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ par parties et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Le nombre moyen de particules par niveau d'énergie est ainsi $p_{\mathbf{k}} \ll n_s$ de sorte que le principe d'exclusion de Pauli ne domine pas la physique du gaz. Les intégrales de Fermi se simplifient alors :

$$F_\alpha(x) \approx e^x \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty dt t^\alpha e^{-t} = e^x. \quad (1.14)$$

Par conséquent,

$$N = V \frac{n_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (kT)^{3/2} e^{\beta\mu} \quad (1.15)$$

$$E = V \frac{n_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (kT)^{5/2} e^{\beta\mu}. \quad (1.16)$$

En substituant la première relation dans la seconde, il vient :

$$E = \frac{3}{2} N kT = \frac{3}{2} n V kT. \quad (1.17)$$

On retrouve là le *théorème d'équipartition de l'énergie* : l'énergie interne d'un gaz classique à température T est égale à $\frac{1}{2}kT$ par degré de liberté quadratique dans l'Hamiltonien (ici, les impulsions p_x, p_y, p_z des N particules). L'énergie interne par particule est donc :

$$\varepsilon = \frac{E}{N} = \frac{3}{2} kT. \quad (1.18)$$

La pression du gaz peut ensuite être définie à partir de considérations cinétiques ou thermodynamiques (dérivée isentropique de l'énergie interne par rapport au volume).

Pression cinétique

A cet effet, imaginons une paroi de surface $S = L_y L_z$ perpendiculaire à x , avec le gaz à sa gauche (la position et la direction choisie n'ont aucune importance dans un gaz homogène et isotrope). La force à exercer sur cette paroi pour la maintenir en place est l'opposée de la quantité de mouvement que lui transfère le gaz par unité de temps :

$$\mathbf{F} = - \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p}_t \rangle. \quad (1.19)$$

Durant un intervalle de temps dt , seules les particules ayant une vitesse $v_x = \hbar k_x / m > 0$ se trouvant dans un volume $dV = S v_x dt$ vont rebondir³ sur la paroi et lui transférer une quantité de mouvement élémentaire $\delta p_x = 2p_x = 2m v_x = 2\hbar k_x$. Par conséquent, la quantité de mouvement totale transférée à la paroi est :

$$dp_x = \int_{k_x > 0} d^3 \mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} (S v_x dt) (2p_x) f(E_{\mathbf{k}}), \quad (1.20)$$

La pression exercée par le gaz sur la paroi est la force $-F_x = dp_x / dt$ par unité de surface :

$$P = 2 \int_{k_x > 0} d^3 \mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} v_x p_x f(E_{\mathbf{k}}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} v_x p_x f(E_{\mathbf{k}}). \quad (1.21)$$

3. On suppose ces collisions élastiques (pas de transfert de chaleur), en accord avec la définition thermodynamique de la pression.

Soit encore :

$$P = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} m v_x^2 f(E_{\mathbf{k}}) = nm \langle v_x^2 \rangle, \quad (1.22)$$

où $\langle v_x^2 \rangle$ est la vitesse carrée moyenne par particule (mesurée le long de x). Dans un gaz isotrope, $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle / 3$, si bien que :

$$P = \frac{1}{3} nm \langle \mathbf{v}^2 \rangle. \quad (1.23)$$

Enfin, l'Hamiltonian du gaz étant purement cinétique, l'énergie interne par particule est :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \langle \mathbf{v}^2 \rangle, \quad (1.24)$$

de sorte que :

$$P = \frac{2}{3} n \varepsilon = \frac{2}{3} \eta, \quad (1.25)$$

où $\eta = n \varepsilon = E/V$ est la densité d'énergie interne. En substituant (1.18) dans (1.25), on obtient finalement « l'équation d'état des gaz parfaits » :

$$P = nkT \text{ ou } PV = NkT. \quad (1.26)$$

Pression thermodynamique

Alternativement, la pression définit la quantité de travail $dW = -PdV$ à fournir pour faire varier le volume V du gaz ; $dE = dW$ est donc la variation d'énergie interne E du gaz lors d'une compression/dilatation adiabatique (*i.e.*, à entropie S et nombre de particules N constants) :

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N}. \quad (1.27)$$

A la limite thermodynamique, on peut par commodité utiliser la définition micro-canonique de l'entropie :

$$S = k \log \Omega(E), \quad (1.28)$$

où $\Omega(E)$ est le nombre d'états accessibles aux particules dans le gaz d'énergie interne E . Comme

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} k_{i\alpha}^2, \quad (1.29)$$

les surfaces d'énergie constantes sont des hyper-sphères de rayon $k(E) = \sqrt{2mE}/\hbar$ dans l'espace \mathbb{R}^{3N} des N vecteurs d'ondes \mathbf{k}_i . Le nombre d'états à l'intérieur de l'hyper-sphère de rayon $k(E)$ est :

$$\mathcal{N}(E) = \frac{1}{N!} \rho_{\mathbf{k}}^N \mathcal{V}(E) \quad (1.30)$$

où :

$$\mathcal{V}(E) = \frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(3N/2 + 1)} k(E)^{3N} \quad (1.31)$$

est le volume de cette hyper-sphère. Le facteur $N!$ au dénominateur de (1.30) rend compte du fait que tous les états obtenus par simple permutation des N particules sont indiscernables. On approxime ensuite $\Omega(E)$ comme le nombre d'états entre les hyper-sphères de rayons E et $E + \delta E$:

$$\Omega(E) = \mathcal{N}(E + \delta E) - \mathcal{N}(E), \quad (1.32)$$

soit :

$$\Omega(E) \sim \frac{d\mathcal{N}(E)}{dE} \delta E = \frac{3N}{2N! \Gamma(3N/2 + 1)} \left[n_s V \left(\frac{2\pi m E}{h^2} \right)^{3/2} \right]^N \frac{\delta E}{E}. \quad (1.33)$$

Le choix de δE est sans importance à la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$ car il ne donne pas lieu à des contributions extensives ($\propto N$) à l'entropie. En utilisant $\Gamma(3N/2 + 1) \equiv (3N/2)!$ et la formule asymptotique de Stirling $N! \sim (N/e)^N \sqrt{2\pi N}$, on obtient en effet :

$$\Omega(E) \sim C e^{5N/2} \left[n_s \frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right)^{3/2} \left(\frac{E}{N} \right)^{3/2} \right]^N \frac{\delta E}{E}, \quad (1.34)$$

où C est une constante numérique. L'entropie par particule $s = S/N$ est donc à la limite thermodynamique :

$$s = k \log \left[\frac{n_s}{n} \left(\frac{4\pi m \varepsilon}{3h^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} k. \quad (1.35)$$

Lors d'une variation adiabatique de volume,

$$ds = 0 \Rightarrow d(V E^{3/2}) = 0 \Rightarrow dV E^{3/2} + \frac{3}{2} V E^{1/2} dE = 0, \quad (1.36)$$

et donc :

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N} = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} \eta. \quad (1.37)$$

On retrouve là le résultat (1.25) de la théorie cinétique. Au cours d'une telle transformation adiabatique, on a en outre $V E^{3/2} \propto V^{5/2} P^{3/2}$ constant, soit équivalamment

$$PV^\gamma, TV^{\gamma-1} \text{ et } T^\gamma P^{1-\gamma} \text{ constants,} \quad (1.38)$$

avec $\gamma = 5/3$ le coefficient adiabatique du gaz (loi de Laplace).

Discussion

Il convient de remarquer que l'énergie interne (1.17) et la pression (1.25) d'un gaz parfait classique sont strictement proportionnels à sa température. En effet, lorsque $T \rightarrow 0$, toutes les particules occupent le niveau fondamental $\psi_{\mathbf{k}=0}$ d'énergie $E = 0$ et d'impulsion nulle. Cependant, le principe d'exclusion de Pauli, qui interdit à chaque niveau d'accueillir plus de n_s particules, ne permet pas une telle condensation ; le gaz va « dégénérer » bien avant.

1.2.3 Gaz dégénéré

Dans la limite inverse $\mu \gg kT$ (température basse au regard de la densité), le gaz est dit dégénéré : une fraction significative des niveaux d'énergie sont occupés par le nombre maximal n_s de particules permis par le principe d'exclusion de Pauli (voir Fig. 1.1b). On a alors à l'ordre 0 en température :

$$f(\varepsilon) = 1 \text{ si } \varepsilon \leq \mu \text{ et } 0 \text{ sinon.} \quad (1.39)$$

On peut dès lors intégrer analytiquement l'énergie interne et le nombre de particules :

$$N = \int_0^\mu d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) = V \frac{n_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{3} \mu^{3/2} \right) \quad (1.40a)$$

$$E = \int_0^\mu d\varepsilon \rho(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon) = V \frac{n_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{5} \mu^{5/2} \right). \quad (1.40b)$$

On calcule ensuite le potentiel chimique (énergie du dernier état occupé) à partir de la première équation :

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left(6\pi^2 \frac{n}{n_s} \right)^{2/3}. \quad (1.41)$$

En substituant μ dans la seconde équation, on exprime enfin l'énergie interne E du gaz en fonction de N , V (et $T \ll \mu/k$) :

$$E = \frac{3}{5} N \mu = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{6\pi^2}{n_s} \right)^{2/3} n^{5/3} V, \quad (1.42)$$

soit par particule :

$$\varepsilon = \frac{E}{N} = \frac{3}{5} \mu = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{6\pi^2}{n_s} \right)^{2/3}. \quad (1.43)$$

Pression de dégénérescence

L'équation (1.21) est également valable dans un gaz dégénéré. Par conséquent, la pression cinétique est, comme dans le gaz classique⁴,

$$P = \frac{2}{3} \eta = \frac{2}{3} \frac{E}{V}, \quad (1.44)$$

c'est à dire :

4. Le calcul de la pression thermodynamique du paragraphe 1.2.2 ne tient pas compte du principe d'exclusion de Pauli (les vecteurs \mathbf{k}_i et les états de spin doivent être tous différents). A l'ordre 0 en température ($T \rightarrow 0$), seul l'état fondamental d'un gaz dégénéré est accessible indépendamment de son volume, si bien que la pression thermodynamique est simplement :

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_N.$$

En écrivant $E \propto N^{5/3} V^{-2/3}$, on retrouve aisément la pression cinétique.

$$P = \frac{\hbar^2}{5m} \left(\frac{6\pi^2}{n_s} \right)^{2/3} n^{5/3}. \quad (1.45)$$

Contrairement à un gaz classique, un gaz de fermions dégénéré exerce une pression finie à température $T \rightarrow 0$ (parce que les particules remplissent tous les niveaux d'énergie jusqu'au potentiel chimique μ à cause du principe d'exclusion de Pauli). Cette pression résiduelle s'appelle la *pression de dégénérescence*. Elle joue un rôle fondamental dans la physique des étoiles très évoluées (équilibre hydrostatique des naines blanches, ...).

Conditions de dégénérescence

La condition de dégénérescence peut s'écrire $\mu \approx 0$; en injectant cette condition dans (1.15), on obtient la densité critique

$$n_{\text{deg}} \approx n_s \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (1.46)$$

au delà de laquelle le gaz dégénère à température T fixée. Cette densité critique croît comme $T^{3/2}$ car l'énergie cinétique du gaz augmente avec la température et sa fonction de distribution s'étale. En assimilant le volume occupé par chaque particule à un cube de côté $\Lambda = n^{-1/3}$, on peut calculer la distance moyenne entre celles-ci lorsque le gaz dégénère :

$$\Lambda_{\text{deg}} = n_{\text{deg}}^{-1/3} \approx n_s^{-1/3} \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mkT}}. \quad (1.47)$$

Cette distance est connue sous le nom de longueur thermique de de Broglie (éventuellement au facteur $n_s^{-1/3}$ près)⁵. A densité constante, le gaz dégénère en dessous de la température :

$$T_{\text{deg}} = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} \left(\frac{n}{n_s} \right)^{2/3}. \quad (1.48)$$

1.2.4 Cas général

On peut résoudre numériquement les équations (1.9) et (1.10) pour calculer l'énergie interne par particule ε et la pression $P = \frac{2}{3}n\varepsilon$ d'un gaz de fermions de densité arbitraire n maintenu à température T (voir le code `idealfermiongas.py`). La figure 1.2(a) représente ainsi la pression P dans un gaz d'électrons ($m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $n_s = 2$) en fonction de la température T à distance moyenne entre particules $\Lambda = n^{-1/3}$ constante. La figure 1.2(b) représente de même la pression P en fonction de Λ à température T constante. Les différents régimes (classique, dégénéré) sont facilement identifiables et les transitions coïncident avec les densités n_{deg} et températures T_{deg} reportées sur ces figures. On remarquera en particulier que la pression est quasiment indépendante de la température dans un gaz dégénéré⁶.

5. La longueur de de Broglie est également comparable à l'extension d'un paquet d'ondes Gaussien d'énergie $\varepsilon = \frac{3}{2}kT$ (ne serait-ce que pour de simples raisons dimensionnelles!). Il est donc d'usage de dire que « le gaz dégénère quand les fonctions d'ondes des électrons thermiques commencent à se recouvrir ».

6. En effet, la température affecte marginalement la distribution des particules loin du potentiel chimique. Voir les développements de Sommerfeld pour une démonstration au delà de l'ordre 0 en température du

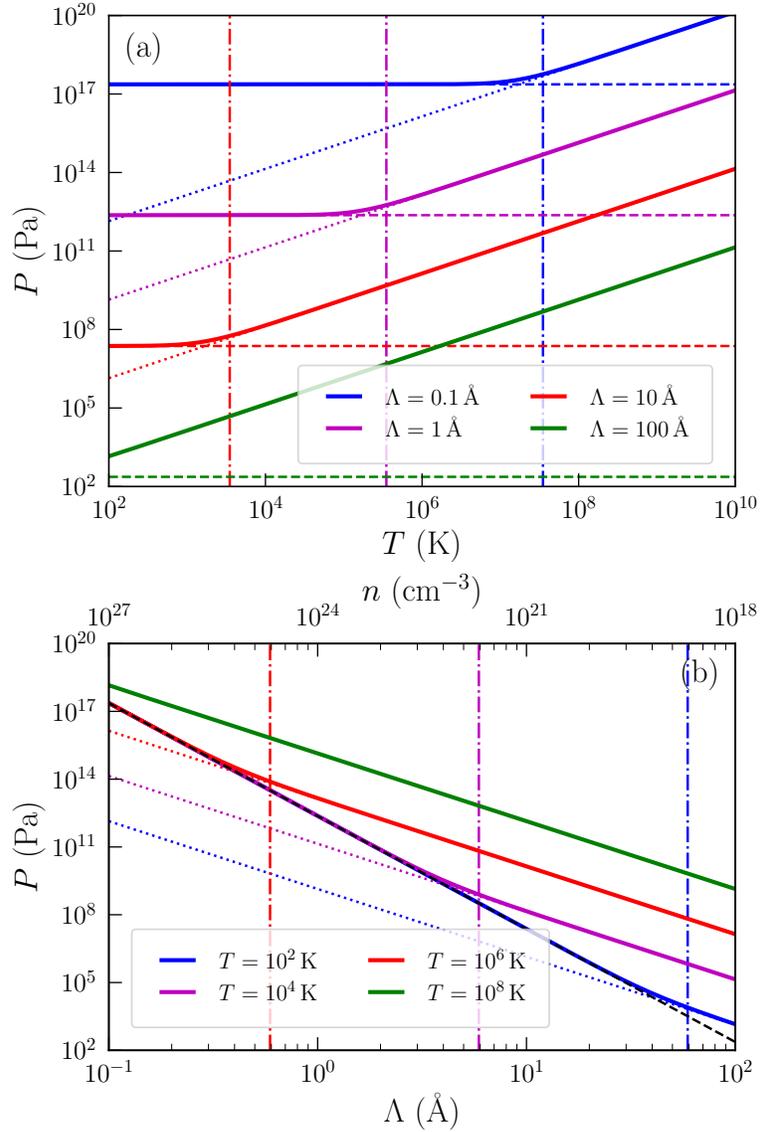


FIGURE 1.2 – (a) Pression P dans un gaz d'électrons en fonction de sa température T pour différentes densités n caractérisées par la distance moyenne entre particules $\Lambda = n^{-1/3}$. Les lignes verticales indiquent la température de dégénérescence T_{deg} [Eq. (1.48)] dans chaque cas. (b) Pression P en fonction de Λ pour différentes températures T . Les lignes verticales indiquent la longueur de dégénérescence Λ_{deg} [Eq. (1.47)] dans chaque cas. Sur ces figures, les pointillés sont les limites classiques [$P = nkT$, Eq. (1.26)], et les tirets les pressions de dégénérescence [Eq. (1.45)].

Degrés de liberté internes

Les particules du gaz peuvent présenter des degrés de liberté internes qui contribuent à son énergie totale. Par exemple, un gaz parfait d'une molécule diatomique telle que O_2 possède cinq degrés de liberté par particule à basse énergie (les trois translations du centre de gravité et les deux rotations d'ensemble de la molécule) ; en supposant ces degrés de libertés faiblement quantifiés (variables classiques continues) et harmoniques, on a alors d'après le théorème d'équipartition de l'énergie $\varepsilon = \frac{5}{2}kT$ par molécule. A plus haute énergie (donc à plus haute température), on pourra aussi sonder le spectre vibrationnel de la molécule (le degré de liberté restant), qui est lui fortement quantifié et ne satisfait donc pas aux conditions du théorème d'équipartition. Toutefois, la théorie cinétique suggère (en première approximation) que seule importe l'impulsion du centre de masse pour définir la pression, et par conséquent que l'équation d'état $P = nkT$ reste valable pour un tel gaz. Il en va de même pour un gaz de noyaux atomiques, qui possèdent des degrés de liberté rotationnels et vibrationnels (à relativement haute énergie cependant).

Mélange de gaz parfaits

Les gaz peuvent être des mélanges de particules discernables (électrons, noyaux de différents types...). De façon générale, l'énergie interne et la pression totale sont la somme des énergies et pressions partielles de chaque type ν de particule, caractérisés par leurs densités respectives n_ν , masse m_ν , et dégénérescence de spin $n_{s\nu}$. Dans le cas classique, non dégénéré, la pression ne dépend que de la densité totale de particules $n = \sum_\nu n_\nu$:

$$P = nkT. \quad (1.49)$$

Si une ou plusieurs composantes du gaz sont dégénérées, il faut utiliser (1.45) avec les n_ν , m_ν , et $n_{s\nu}$ correspondants. La densité de dégénérescence n_{deg} étant proportionnelle à $m^{3/2}$ [Eq. (1.46)], les électrons dégénèrent en particulier bien avant les noyaux dans un plasma.

Interactions Coulombiennes

En pratique, les particules du gaz peuvent entretenir des interactions à longue portée, en particulier si elles sont chargées (ce qui est le cas dans les plasmas rencontrés dans les étoiles). Ces interactions peuvent dominer la physique du gaz dans certains régimes et changer radicalement sa structure et son équation d'état (formation des atomes et molécules, cristallisation de Wigner dans les gaz d'électrons, ...). Une simple analyse dimensionnelle suggère que l'énergie cinétique du gaz est $\propto \Lambda^{-2}$ alors que son énergie Coulombienne (interactions de paires en $1/r$ dans un système globalement neutre) est $\propto \Lambda^{-1}$ (cf. modèle du jellium). Par conséquent, l'énergie cinétique domine la physique du gaz à haute densité et/ou haute température, alors que les interactions Coulombiennes prennent le pas à basse densité et basse température. Dans les conditions chaudes et/ou denses rencontrées dans les étoiles, elles ne jouent donc pas de rôle majeur, mais peuvent néanmoins donner lieu à quelques corrections quantitatives.

paragraphe 1.2.3.

1.2.5 Gaz (ultra-)relativiste

Il convient en principe de vérifier que le gaz n'est pas devenu relativiste (auquel cas il faut substituer l'équation de Dirac à (1.1)), et donc que :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}^2 \rangle \ll \frac{1}{2}mc^2, \quad (1.50)$$

où $c = 299\,792\,458$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide. Dans un gaz non dégénéré, où $\varepsilon = \frac{3}{2}kT$, la température doit par conséquent rester bien inférieure à :

$$T_r = \frac{mc^2}{3k} \quad (1.51)$$

qui vaut $T_r \approx 2 \times 10^9$ K pour des électrons. Dans un gaz dégénéré, on obtient plutôt de (1.43) une relation sur la densité :

$$n \ll n_r = \frac{n_s}{6\pi^2} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{mc}{\hbar} \right)^3 \quad (1.52)$$

qui vaut $n_r \approx 1.25 \times 10^{30}$ cm⁻³ pour des électrons. Les corrections relativistes sont donc déjà non négligeables (voir essentielles) dans certaines parties de la figure 1.2.

On peut établir l'équation d'état d'un gaz parfait au caractère arbitrairement relativiste en substituant à (1.2) la relation de dispersion

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2\mathbf{k}^2c^2}. \quad (1.53)$$

L'impulsion (ou quantité de mouvement) des particules est $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \gamma m\mathbf{v}$, avec \mathbf{v} la vitesse et γ le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (1.54)$$

En inversant cette relation il vient :

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{m^2c^2}}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}. \quad (1.55)$$

Lorsque $\hbar^2\mathbf{k}^2 \ll m^2c^2$, $\gamma \rightarrow 1$ et on retrouve :

$$E_{\mathbf{k}} \simeq mc^2 + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}, \quad (1.56)$$

où le premier terme est l'énergie de masse au repos et le second l'énergie cinétique non-relativiste (1.2). On peut aisément s'affranchir de l'énergie de masse au repos dans un gaz non relativiste en redéfinissant l'origine des énergies.

On peut démontrer que l'équation d'état $P = nkT$ est toujours valable dans un gaz relativiste non dégénéré. On s'intéresse plus particulièrement ici à la limite dégénérée $T \rightarrow 0$.

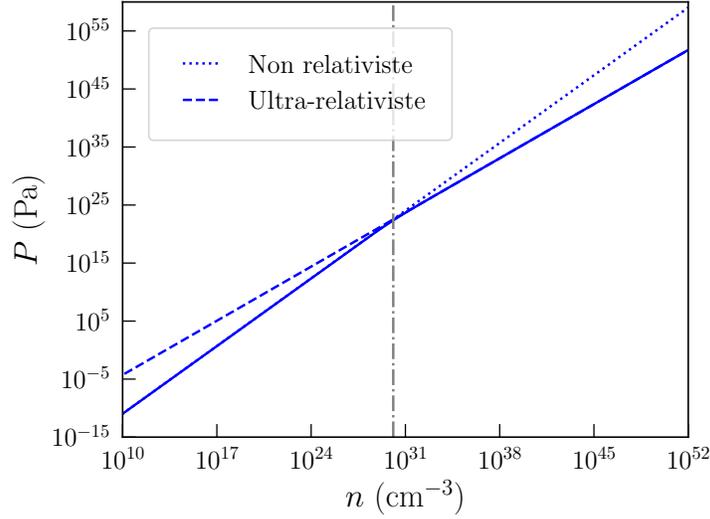


FIGURE 1.3 – Pression P dans un gaz d'électrons dégénéré en fonction de la densité n à température $T \rightarrow 0$. Les régimes non-relativistes $P \propto n^{5/3}$ [Eq. (1.45)] et ultra-relativistes $P \propto n^{4/3}$ [Eq. (1.60)] sont bien identifiables. La ligne verticale est la densité relativiste n_r [Eq. (1.52)].

Comme $E_{\mathbf{k}}$ est une fonction croissante de $k = |\mathbf{k}|$, les fermions occupent tous les états de vecteur d'onde $k < k_F$ tel que :

$$n = \rho_{\mathbf{k}} \frac{4\pi}{3} k_F^3 \Rightarrow k_F = \left(6\pi^2 \frac{n}{n_s} \right)^{1/3}. \quad (1.57)$$

Ce résultat est indépendant du caractère relativiste du gaz. La pression cinétique reste définie par (1.21) :

$$\begin{aligned} P &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} v_x p_x f(E_{\mathbf{k}}) = \int_{k < k_F} d^3\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} v_x p_x \\ &= \frac{n_s}{(8\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{k_F} dk k^2 \hbar k \cos \theta \frac{\frac{\hbar k}{m} \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m^2 c^2}}} \\ &= \frac{n_s m^4 c^5}{6\pi^2 \hbar^3} F\left(\frac{\hbar k_F}{mc}\right), \end{aligned} \quad (1.58)$$

où :

$$F(x) = \int_0^x du \frac{u^4}{\sqrt{1 + u^2}}. \quad (1.59)$$

La pression est représentée en fonction de la densité d'électrons n sur la figure 1.3. Dans la limite $x = \hbar k_F / (mc) \ll 1$, $F(x) \sim x^5/5$ et on retrouve l'expression (1.45) pour un gaz dégénéré non-relativiste ($P \propto n^{5/3}$). A l'inverse, dans la limite « ultra-relativiste » $x = \hbar k_F / (mc) \gg 1$, $F(x) \sim x^4/4$ si bien que :

$$P = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{6\pi^2}{n_s} \right)^{1/3} n^{4/3}. \quad (1.60)$$

La pression dans un gaz dégénéré ultra-relativiste croît donc comme $n^{4/3}$ au lieu de $n^{5/3}$ car les particules vont moins vite à quantité de mouvement égale. Cette « faible » dépendance à la densité implique l'existence d'une masse limite pour un objet dégénéré au-delà de laquelle il s'effondre sous son propre poids (masse de Chandrasekhar, voir paragraphe 1.4.4).

1.3 Gaz de photons, rayonnement du corps noir et pression de radiation

1.3.1 Modèle

On peut de même calculer l'énergie et la pression d'un « gaz de photons » dans une enceinte⁷ à la température T . Les photons sont des bosons sans masse ; les modes propres de photons dans le vide sont également des ondes planes caractérisées par leur vecteur d'onde \mathbf{k} . Leur énergie $E_{\mathbf{k}} = \hbar c |\mathbf{k}|$ est linéaire en k , à la différence des particules massives, et leur impulsion est $\mathbf{p}_{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k}$ (comme pour ces dernières). La vitesse des photons dans le vide est $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = c \mathbf{k}/k$ ($|\mathbf{v}_{\mathbf{k}}| = c$). On peut introduire la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et la fréquence $\nu = E/h$ et écrire indifféremment :

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \hbar c k. \quad (1.61)$$

La dégénérescence des modes de photons est $n_s = 2$ (polarisations horaire et anti-horaire). On quantifie le vecteur d'onde comme au paragraphe 1.2 pour calculer les grandeurs thermodynamiques ; En équilibre à la température T , chaque mode est en moyenne occupé par $n_s f(E_{\mathbf{k}})$ photons où f est cette fois la fonction de distribution de Bose-Einstein :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}. \quad (1.62)$$

On aura donc pour toute observable O telle que $O_{\mathbf{k}}$ ne dépend que de k :

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= V \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} O_{\mathbf{k}} f(E_{\mathbf{k}}) = 4\pi V \int_0^\infty dk \rho_k k^2 O_k f(E_k) \\ &= V \int_0^\infty d\nu \rho(\nu) O(\nu) f(h\nu), \end{aligned} \quad (1.63)$$

où $k = 2\pi\nu/c$ et $\rho(\nu)$ est la densité d'états de photons par unité de volume et par unité de fréquence :

$$\rho(\nu) = 4\pi \rho_k k^2 \frac{dk}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}. \quad (1.64)$$

En particulier, la densité d'énergie par unité de volume dans le gaz de photons est :

$$\eta_\nu = \int_0^\infty d\nu \rho(\nu) h\nu f(h\nu). \quad (1.65)$$

7. On traite ici par analogie les photons comme les fermions au paragraphe 1.2 ; toutefois, les photons n'ont pas d'interactions entre eux et ne peuvent donc se thermaliser que par couplage avec de la matière. Ces mécanismes de couplage seront explicités au chapitre 2.

En faisant le changement de variable $x = \beta h\nu$,

$$\eta_r = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = aT^4, \quad (1.66)$$

où⁸ :

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} = 7.566 \times 10^{-16} \text{ J/m}^3/\text{K}^4 \quad (1.67)$$

est la constante de radiation.

1.3.2 Rayonnement du corps noir

Si des « parois » de l'enceinte sont transparentes, les photons vont fuir et le système va rayonner. Alternativement, si un objet est introduit dans l'enceinte, et atteint l'équilibre thermique avec le bain de photons, il doit rayonner autant de photons qu'il en reçoit (que ce soit par réflexion, absorption/émission, ... à chaque énergie et dans chaque direction). Ce rayonnement thermique est connu sous le nom de « rayonnement du corps noir⁹ » (parce que les objets froids ne rayonnent pas dans le visible). Dans le premier cas, le rayonnement émis correspond au flux de photons sortant de l'enceinte, et dans le second cas, au flux de photons rentrant dans le corps. Considérons donc une surface S perpendiculaire à x avec le gaz de photons à sa gauche (à nouveau, la position et l'orientation de cette surface n'ont aucune importance dans un système homogène et isotrope). La quantité d'énergie rayonnée au travers de cette surface pendant un intervalle de temps dt est :

$$dE = \int_{k_x > 0} d^3\mathbf{k} \rho_k \left(S \frac{k_x}{k} c dt \right) h\nu_k f(h\nu_k). \quad (1.68)$$

La puissance rayonnée par unité de surface (densité de flux radiatif sortant ou excitance énergétique) est donc :

$$M = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt} = \int_{k_x > 0} d^3\mathbf{k} \rho_k \left(\frac{k_x}{k} c \right) h\nu_k f(h\nu_k), \quad (1.69)$$

qui s'intègre aisément en coordonnées sphériques ($k_x = k \cos \theta$) :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^\infty dk \rho_k c k^2 h\nu_k f(h\nu_k) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^\infty d\nu \frac{c}{4\pi} \rho(\nu) h\nu f(h\nu) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^\infty d\nu L_{\Omega, \nu}(\nu), \end{aligned} \quad (1.70)$$

8. On peut utiliser la fonction de Riemann ou la transformation de Mellin pour montrer que :

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

9. Ce rayonnement est par nature « invisible » d'un observateur à la même température puisqu'il constitue le bruit de fond photonique ; il n'est clairement séparable de ce bruit de fond que dans une situation hors-équilibre global où une source à la température T est observée par un détecteur à la température $T' \neq T$. C'est le cas par exemple lorsque le Soleil, assimilable à un corps noir de température $T = 5775 \text{ K}$, est observé depuis la Terre à $T' = 300 \text{ K}$, les photons solaires ayant subi peu d'interactions sur leur trajet (voir paragraphe 1.3.4).

où :

$$L_{\Omega,\nu}(\nu) = \frac{c}{4\pi} \rho(\nu) h\nu f(h\nu) \quad (1.71)$$

est la luminance énergétique spectrale. C'est la puissance émise à la fréquence ν dans la direction (θ, φ) , par unité de fréquence, de *surface effective* du corps noir, et d'angle solide. Cette surface effective est la surface apparente $S \cos \theta$ sous laquelle on voit S depuis un angle θ avec sa normale (d'où le $\cos \theta$ qui multiplie l'angle solide élémentaire $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$). Pour un corps en équilibre à la température T ,

$$L_{\Omega,\nu}(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (\text{loi de Planck}). \quad (1.72)$$

On peut aisément terminer l'intégration dans l'hémisphère où rayonne S et écrire :

$$M = \int_0^\infty d\nu M_\nu(\nu), \quad (1.73)$$

où $M_\nu(\nu) = \pi L_{\Omega,\nu}(\nu)$ est l'excitance énergétique spectrale (densité spectrale de puissance rayonnée par unité de surface du corps noir). A l'équilibre thermique,

$$M_\nu(\nu, T) = \pi L_{\Omega,\nu}(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}. \quad (1.74)$$

On peut alternativement intégrer d'abord sur la fréquence et définir la luminance énergétique (ou radiance) par unité de surface effective du corps noir et d'angle solide :

$$L_\Omega = \int_0^\infty d\nu L_{\Omega,\nu}(\nu) = \frac{c}{4\pi} \int_0^\infty d\nu \rho(\nu) h\nu f(h\nu) = \frac{c}{4\pi} \eta_r, \quad (1.75)$$

laquelle est donc proportionnelle à la densité d'énergie interne du gaz de photons. A la température T ,

$$L_\Omega(T) = \frac{c}{4\pi} aT^4 = \frac{2(\pi kT)^4}{15h^3 c^2}. \quad (1.76)$$

Finalement, toutes intégrations faites,

$$M(T) = \pi L_\Omega(T) = \frac{c}{4} \eta_r(T) = \frac{2\pi^5}{15h^3 c^2} (kT)^4 = \sigma T^4. \quad (1.77)$$

C'est la loi de Stefan-Boltzmann, et $\sigma = ac/4 = 2\pi^5 k^4 / (15h^3 c^2) = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$ est la constante du même nom. Enfin, on définit la luminosité (ou flux énergétique) comme la puissance totale rayonnée

$$L(T) = SM(T), \quad (1.78)$$

où S est la surface du corps noir. On retrouvera dans la Table 1.1 les principales grandeurs photométriques introduites dans ce paragraphe.

Nom		Description	Unité
Luminance énergétique, Radiance	L_Ω	Puissance traversant une unité de surface dans une direction (θ, φ) donnée, par unité d'angle solide	W/sr/m ²
Densité de flux radiatif	F_r	Puissance totale traversant une unité de surface, $F_r = \int_{\text{Sphère}} d\Omega \cos \theta L_\Omega(\theta, \varphi)$	W/m ²
Excitance énergétique	M	Densité de flux radiatif sortant, $M = \int_{\text{Hémisphère}} d\Omega \cos \theta L_\Omega(\theta, \varphi)$	W/m ²
Luminosité	L	Puissance totale rayonnée par une surface S, $L = \int_S d^2\mathbf{r} M(\mathbf{r})$	W
Intensité énergétique	I	Puissance totale rayonnée par unité d'angle solide [$I = L/(4\pi)$ pour un rayonnement isotrope]	W/sr
Eclairement énergétique, Irradiance	E_e	Puissance reçue par unité de surface	W/m ²

TABLE 1.1 – Les principales grandeurs photométriques utilisées dans ce document et leurs relations. Chaque grandeur A peut-être décomposée spectralement $A = \int_0^\infty d\nu A_\nu(\nu) = \int_0^\infty d\lambda A_\lambda(\lambda)$ avec $A_\lambda(\lambda) = (c/\lambda^2)A_\nu(c/\lambda)$.

1.3.3 Pression de radiation

Si au contraire les photons sont réfléchis par des parois de l'enceinte, ils vont exercer sur elles une pression cinétique (comme le font les particules massives)¹⁰. En reprenant le raisonnement du paragraphe 1.2.2, il vient :

$$\begin{aligned}
 P_r &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} v_x p_x f(h\nu_{\mathbf{k}}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \rho_{\mathbf{k}} \left(\frac{k_x}{k} c \right) \hbar k_x f(h\nu_{\mathbf{k}}). \tag{1.79}
 \end{aligned}$$

Cette expression s'intègre facilement en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
 P_r &= \hbar c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^\infty dk \rho_{\mathbf{k}} k^3 f(h\nu_{\mathbf{k}}) \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^\infty dk \rho_{\mathbf{k}} c k^2 h\nu_{\mathbf{k}} f(h\nu_{\mathbf{k}}) \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^\infty d\nu L_{\Omega, \nu}(\nu) \quad [\text{cf. Eq. (1.70)}] \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta L_\Omega \\
 &= \frac{4\pi}{3c} L_\Omega = \frac{1}{3} \eta_r. \tag{1.80}
 \end{aligned}$$

¹⁰. On peut aussi calculer la pression à partir d'une approche thermodynamique analogue à celle du paragraphe 1.2.2.

La pression de radiation est donc le tiers de la densité d'énergie interne (*vs* deux tiers pour les fermions massifs non relativistes). A l'équilibre thermodynamique à la température T ,

$$P_r(T) = \frac{4\sigma}{3c}T^4 = \frac{1}{3}aT^4. \quad (1.81)$$

Retour sur la luminance énergétique et ses moments

On aura pu remarquer dans la dérivation du rayonnement du corps noir et de la pression de radiation les relations qui unissent les moments de la luminance énergétique

$$\hat{\mu}_n(L_\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^n\theta L_\Omega(\theta, \varphi) \quad (1.82)$$

aux différentes grandeurs d'intérêt :

- $\hat{\mu}_0(L_\Omega) = c\eta_r$,
- $\hat{\mu}_1(L_\Omega) = F_r$, la densité de flux radiatif qui traverse (toutes directions confondues) une surface dans le gaz de photons.
- $\hat{\mu}_2(L_\Omega) = cP_r$.

Ces relations sont valables quelle que soit la fonction de distribution $f(\nu)$ du gaz de photons. Elles peuvent même s'appliquer si cette distribution est anisotrope. Introduisons en effet une fonction de distribution angulaire $f_\Omega(\theta, \varphi, \nu)$ (par unité de fréquence et d'angle solide) avec pour seule contrainte une symétrie axiale $f_\Omega(\theta, \varphi, \nu) = f_\Omega(-\theta, \varphi, \nu) = f_\Omega(\theta, \varphi + \pi, \nu)$. La luminance énergétique spectrale est alors

$$L_{\Omega, \nu}(\theta, \varphi, \nu) = c\rho(\nu)h\nu f_\Omega(\theta, \varphi, \nu). \quad (1.83)$$

La luminance énergétique reste définie par :

$$L_\Omega(\theta, \varphi) = \int_0^\infty d\nu L_{\Omega, \nu}(\theta, \varphi, \nu). \quad (1.84)$$

La densité d'énergie par unité de volume, le flux radiatif et la pression de radiation au travers de/sur une surface perpendiculaire à l'axe polaire s'écrivent alors, sur le même modèle qu'aux paragraphes précédents :

$$\eta_r = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty d\nu \rho(\nu)h\nu f_\Omega(\theta, \varphi, \nu) = \frac{1}{c}\hat{\mu}_0(L_\Omega) \quad (1.85a)$$

$$F_r = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta L_\Omega(\theta, \varphi) = \hat{\mu}_1(L_\Omega) \quad (1.85b)$$

$$P_r = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_0^\infty d\nu \rho(\nu)h\nu f_\Omega(\theta, \varphi, \nu) = \frac{1}{c}\hat{\mu}_2(L_\Omega). \quad (1.85c)$$

Ces relations seront utilisées pour dériver les équations de transfert radiatif au chapitre 2.

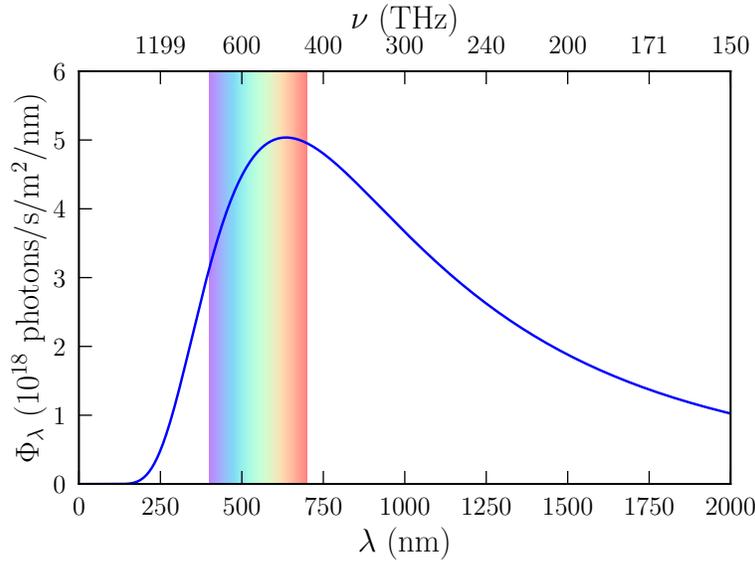


FIGURE 1.4 – Nombre de photons reçus chaque seconde du Soleil sur 1 m^2 de surface terrestre, par unité de longueur d’onde. Le Soleil est modélisé comme un corps noir à la température $T_{\odot} = 5775 \text{ K}$. Le spectre est décliné en fonction de la longueur d’onde λ des photons incidents (échelle du bas) et de leur fréquence ν (échelle du haut). Le domaine du rayonnement visible est délimité par l’arc-en-ciel.

1.3.4 Application : spectre, luminosité, et éclairage du Soleil

Avec sa température de surface¹¹ $T_{\odot} = 5775 \text{ K}$, et son rayon $R_{\odot} = 696\,340 \text{ km}$, le Soleil [2] modélisé comme un corps noir rayonne¹² :

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 = 3.84 \times 10^{26} \text{ W}. \quad (1.86)$$

L’intensité énergétique (puissance émise par unité d’angle solide) d’une étoile est

$$I = \frac{L}{4\pi} \quad (1.87)$$

puisque son rayonnement est isotrope. Un instrument (miroir de télescope, ...) de surface A situé à une distance d de l’étoile est vu depuis celle-ci sous un angle solide¹³ $\Omega \approx A/d^2$, et va donc collecter une puissance totale :

$$P \approx I \frac{A}{d^2} = \frac{L}{4\pi} \frac{A}{d^2} = A E_e, \quad (1.88)$$

où $E_e = L/(4\pi d^2)$ est l’éclairement énergétique ou irradiance (puissance reçue par unité de surface). Cette puissance décroît comme $1/d^2$ comme attendu de la conservation du

11. Il s’agit d’une température effective de couleur plutôt que de la température réelle de la « surface » du Soleil (voir définition de la photosphère au chapitre 2). On suppose que tous les photons émis au cœur du Soleil sont thermalisés à la température T_{\odot} une fois parvenus à sa surface.

12. La définition normalisée de la luminosité solaire est $L_{\odot} = 3.828 \times 10^{26} \text{ W}$.

13. On suppose ici la surface A perpendiculaire à l’axe qui la relie à l’étoile ; dans le cas contraire il faut lui substituer la surface effective $A \cos \theta$, où θ est l’angle que fait la normale à la surface avec cet axe.

flux de photons. En particulier, l'éclairement énergétique du Soleil sur la Terre ($d_{\odot} \approx 150\,000\,000$ km) est $E_e(\odot) = L_{\odot}/(4\pi d_{\odot}^2) = 1360$ W/m² (en négligeant l'absorption par l'atmosphère). Le spectre de cette lumière est représenté sur la figure 1.4 (voir le code `blackbody.py`). On a calculé le nombre de photons arrivant chaque seconde sur une surface terrestre $A = 1$ m², par unité de fréquence d'abord,

$$\Phi_{\nu}(\nu) = \frac{1}{h\nu} (4\pi R_{\odot}^2) M_{\nu}(\nu, T_{\odot}) \frac{1}{4\pi d_{\odot}^2} = \frac{1}{h\nu} M_{\nu}(\nu, T_{\odot}) \left(\frac{R_{\odot}}{d_{\odot}}\right)^2, \quad (1.89)$$

puis par unité de longueur d'onde :

$$\Phi_{\lambda}(\lambda) = \Phi_{\nu} \left(\frac{c}{\lambda}\right) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{1}{h\lambda} M_{\nu} \left(\frac{c}{\lambda}, T_{\odot}\right) \left(\frac{R_{\odot}}{d_{\odot}}\right)^2. \quad (1.90)$$

La forme « en cloche » du spectre de la figure 1.4 est caractéristique d'un corps noir : la quantité de photons émis décroît à haute fréquence/basse longueur d'onde car l'énergie thermique kT_{\odot} n'est pas suffisante pour produire de tels photons, et à basse fréquence/grande longueur d'onde parce que la densité de modes (1.64) susceptibles de porter ces photons devient trop faible. En pratique, le Soleil présente des raies d'absorption marquées à l'intérieur de son spectre liées aux interactions entre les photons et la matière (en particulier les atomes incomplètement ionisés de la photosphère). La mesure de l'enveloppe « corps noir » du spectre d'une étoile permet de calculer sa température de surface T_c (en supposant que les photons émis dans le coeur chaud de l'étoile sont thermalisés lorsqu'ils parviennent à sa surface). Cette température définit donc la couleur de l'étoile (jaune-orangé pour le Soleil). La densité de flux radiatif croissant comme T_c^4 , une étoile deux fois plus chaude que le Soleil va rayonner 16 fois plus (par unité de surface). Plus précisément, la luminosité L , le rayon R , et la température $T \equiv T_c$ d'une étoile sont liées à celles (L_{\odot} , R_{\odot} , T_{\odot}) du Soleil par la relation :

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4. \quad (1.91)$$

1.3.5 Magnitudes

On définit la magnitude bolométrique d'une étoile à partir de sa luminosité totale :

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol}}(\odot) = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right). \quad (1.92)$$

La magnitude bolométrique du Soleil relève d'un choix, $M_{\text{bol}}(\odot) = 4.74$. De façon contre-intuitive, la luminosité d'une étoile est d'autant plus faible que sa magnitude est grande. On définit également la magnitude absolue d'une étoile à partir de son éclairement énergétique si elle était situé à une distance de référence $d_{\text{ref}} = 10$ parsecs = 32.6 années-lumière :

$$M_{\text{abs}} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \frac{1}{4\pi d_{\text{ref}}^2}\right) + C = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) + C', \quad (1.93)$$

où C , C' sont des constantes. Il est difficile (voir impossible) de mesurer la luminosité réelle d'une étoile car les instruments n'intègrent jamais qu'une partie du spectre. Dans la fenêtre du visible ($\lambda \equiv 550 \pm 44$ nm), on choisit C' telle que $M_{\text{abs}}^{\text{v}}(\odot) = 4.83$, si bien que :

$$M_{\text{abs}}^{\text{v}} = 4.83 - 2.5 \log_{10} \left(\frac{L^{\text{v}}}{L_{\odot}^{\text{v}}}\right). \quad (1.94)$$

Enfin, la magnitude apparente est définie à partir de l'éclairement énergétique mesuré sur Terre :

$$M_{\text{app}} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \frac{1}{4\pi d^2} \right) = M_{\text{abs}} + 5(\log_{10} d - 1), \quad (1.95)$$

où la distance d est exprimée en parsecs. La magnitude apparente du Soleil dans la bande du visible est donc $M_{\text{app}}^{\text{v}}(\odot) = -26.7$ ($d_{\odot} = 4.848 \times 10^{-6}$ parsecs). L'estimation d'au moins deux quantités (magnitude apparente et distance par exemple) permet en principe de reconstruire la troisième (magnitude absolue). Il faut néanmoins prendre soin de corriger la magnitude apparente mesurée de l'absorption additionnelle par l'atmosphère, les poussières et les gaz interstellaires. On remarquera aussi que la différence de magnitude apparente entre deux corps A et B est simplement :

$$M_{\text{app}}(B) - M_{\text{app}}(A) = -2.5 \log_{10} \left(\frac{E_e(B)}{E_e(A)} \right). \quad (1.96)$$

En particulier,

$$M_{\text{app}} - M_{\text{app}}(\odot) = -2.5 \log_{10} \left(\frac{E_e}{E_e(\odot)} \right). \quad (1.97)$$

Il faut toujours adapter $M_{\text{app}}(\odot)$ et $E_e(\odot)$ à la bande de fréquences effectivement mesurée par les instruments – En particulier, $M_{\text{app}} = 0$ pour $E_e = 3.631 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$ dans la bande du visible.

1.4 Forces de pesanteur

1.4.1 Loi de la gravitation universelle

Deux corps de masse m_1 et m_2 aux positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 s'attirent mutuellement sous l'effet de la gravité ; les forces \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 qui s'exercent sur ces corps sont (Loi de Newton de la gravitation universelle) :

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (1.98)$$

où $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$, et $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ est la constante gravitationnelle. La norme de ces forces,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (1.99)$$

décroit comme le carré de la distance qui sépare les deux corps. Ces forces dérivent d'un potentiel scalaire :

$$\mathbf{F}_1 = -m_1 \nabla_{\mathbf{r}_1} V_2(r_{12}) \ \& \ \mathbf{F}_2 = -m_2 \nabla_{\mathbf{r}_2} V_1(r_{12}), \quad (1.100)$$

où :

$$V_i(r) = -G \frac{m_i}{r}. \quad (1.101)$$

On remarquera l'analogie avec l'électrostatique, à ceci près que les masses, à l'inverse des charges, sont toujours positives (et les forces de gravité toujours attractives). Par extension, la force exercée par une distribution de masse volumique $\rho(\mathbf{r})$ sur une masse ponctuelle m située au point \mathbf{r} est :

$$\mathbf{F} = -m \nabla_{\mathbf{r}} V[\rho](\mathbf{r}), \quad (1.102)$$

où le potentiel gravitationnel de la distribution de masse est :

$$V[\rho](\mathbf{r}) = -G \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.103)$$

On peut aussi définir une énergie potentielle interne de pesanteur $U_g[\rho]$ comme le travail qu'il a fallu fournir pour construire adiabatiquement la distribution de masse $\rho(\mathbf{r})$. Comme cette énergie interne ne doit pas dépendre du chemin suivi, on suppose ramener depuis l'infini des masses élémentaires $dm = M d\alpha$ (avec M la masse totale), que l'on répartit suivant le modèle de la distribution $\rho(\mathbf{r})$; le travail fourni au cours de cette opération est :

$$dW(\alpha) = d\alpha \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) V[\alpha\rho](\mathbf{r}), \quad (1.104)$$

où $V[\alpha\rho](\mathbf{r}) = \alpha V[\rho](\mathbf{r})$ est le potentiel créé par la distribution de masse $\alpha\rho(\mathbf{r})$. Le travail total fourni est donc :

$$W = \int_0^1 d\alpha \frac{dW}{d\alpha}, \quad (1.105)$$

si bien que :

$$U_g[\rho] = W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) V[\rho](\mathbf{r}) = -\frac{G}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.106)$$

qui s'interprète comme la somme des interactions de paires entre masses élémentaires $\rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$ et $\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$, le facteur $\frac{1}{2}$ corrigeant le double comptage $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$.

1.4.2 Distributions de masse de symétrie sphérique

Si la densité de masse $\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(r)$ a la symétrie sphérique (comme c'est le cas pour une étoile), le potentiel $V[\rho](\mathbf{r}) \equiv V[\rho](r)$ l'a aussi. Il est bien plus aisé de traiter ce problème dans sa forme différentielle. En injectant la relation

$$\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.107)$$

dans le potentiel (1.103), il vient :

$$\Delta_{\mathbf{r}} V[\rho](\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}), \quad (1.108)$$

en parfaite analogie encore avec l'équation de Poisson en électrostatique. En coordonnées et en symétrie sphériques, le potentiel $V[\rho](r)$ vérifie donc l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} V[\rho](r) \right) = 4\pi G\rho(r). \quad (1.109)$$

On peut multiplier les deux membres par r^2 et intégrer sur r . En admettant que $r^2 dV(r)/dr$ tends vers 0 lorsque $r \rightarrow 0$ (à vérifier *a posteriori*),

$$r^2 \frac{d}{dr} V[\rho](r) = 4\pi G \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \quad (1.110)$$

On reconnaît à droite la masse totale $\mathcal{M}[\rho](r)$ contenue dans la sphère de rayon r :

$$\mathcal{M}[\rho](r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \quad (1.111)$$

On obtient ainsi une relation entre le gradient de potentiel et la masse enclose dans cette sphère :

$$\frac{d}{dr} V[\rho](r) = \frac{G\mathcal{M}[\rho](r)}{r^2}. \quad (1.112)$$

La force radiale qui s'exerce sur une masse test m_t est donc :

$$F(r) = m_t \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -m_t \frac{d}{dr} V[\rho](r) = -m_t g[\rho](r), \quad (1.113)$$

où :

$$g[\rho](r) = \frac{G\mathcal{M}[\rho](r)}{r^2} \quad (1.114)$$

est l'accélération centripète subie dans le champ de pesanteur de la distribution de masse $\rho(r)$. L'énergie potentielle interne de pesanteur de cette distribution est enfin (en supposant $V[\rho](r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$) :

$$U_g[\rho] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \rho(r) V[\rho](r) = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \int_0^r dr' g[\rho](r'). \quad (1.115)$$

Pour une sphère homogène de rayon R et de masse M , on trouve aisément :

$$U_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.116)$$

1.4.3 Equilibre hydrostatique

A quelle condition un objet, caractérisé par sa distribution de masse $\rho(\mathbf{r})$, et soumis à sa propre pesanteur, est-il en équilibre ? Pour répondre à cette question, nous allons supposer que cet objet est au repos¹⁴ et n'oppose aucune résistance à la déformation (fluide idéal dans la limite « hydrostatique »). Les forces de pesanteur dérivant d'un potentiel central, rien ne brise la symétrie isotrope de l'espace, aussi la distribution de masse $\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(r)$ doit-elle adopter une forme sphérique. Imaginons isoler un élément de volume $dV = dS dr$ de

14. Cette condition est bien plus stricte que d'imposer la stationnarité de $\rho(\mathbf{r})$ (divergence des courants de matière nulle). En effet, la pression cinétique dans un objet parcouru par des courants de matière n'est plus isotrope, aussi cet objet doit-il être décrit par un modèle hydrodynamique (Navier-Stokes). Les corrections hydrodynamiques à la physique d'une étoile (rotation différentielle des gaz, mouvements de convection...) sont quantitatives, mais rarement qualitatives.

l'objet à la distance r du centre. Cet élément est soumis à la pression P de la matière et du rayonnement qui l'entoure, et à son propre poids dans le champ de pesanteur. Par symétrie, la résultante des forces qui s'exercent sur les parois latérales de l'élément de volume est nulle; les forces radiales qu'il subit sont :

- La force de pression sur sa face supérieure $F_{\text{sup}} = -P(r + dr)dS$,
- La force de pression sur sa face inférieure $F_{\text{inf}} = P(r)dS$,
- Son poids $F = -(\rho(r)drdS)g[\rho](r)$.

A l'équilibre hydrostatique, la somme de ces forces doit être nulle :

$$[P(r + dr) - P(r)]dS = -\rho(r)g[\rho](r)drdS. \quad (1.117)$$

La pression doit donc vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dr}P(r) = -\rho(r)g[\rho](r) = -\rho(r)\frac{GM[\rho](r)}{r^2}. \quad (1.118)$$

Poussée d'Archimède et critères de stabilité de l'équilibre hydrostatique

Introduisons maintenant une masse test m_t dans le fluide (sous la forme d'un solide indéformable de volume $\delta V = \delta S \delta r$ et de densité homogène ρ_t). Où cette masse est-elle dans une position stable? La force radiale qu'elle subit, appelée « poussée d'Archimède » est, à l'instar du raisonnement précédent,

$$F = [P(r) - P(r + \delta r)]\delta S - \rho_t g[\rho](r)\delta r \delta S. \quad (1.119)$$

Si le fluide reste à l'équilibre hydrostatique, $dP/dr = -\rho(r)g[\rho](r)$, si bien que :

$$F \approx [\rho(r) - \rho_t]g[\rho](r)\delta V. \quad (1.120)$$

Par conséquent, la masse test coule si elle est plus dense que le fluide, monte si elle est moins dense, et est à l'équilibre lorsque $\rho_t = \rho(r)$ (ou, si elle n'est pas complètement immergée, lorsqu'elle a déplacé un volume de fluide de même poids). Cet équilibre est stable si et seulement si $\rho(r)$ est une fonction décroissante de r (déplacée vers le bas, dans un milieu plus dense, ou vers le haut, dans un milieu moins dense, la masse est rappelée vers son point d'équilibre par la poussée d'Archimède). En appliquant cet argument au fluide lui-même, on conclut que l'équilibre hydrostatique n'est stable que si $d\rho/dr < 0$. Bien que ce soit généralement vrai, il faut garder à l'esprit que le fluide n'est pas indéformable, et donc qu'un volume test déplacé hors équilibre va voir sa densité changer (cf. instabilité convective au chapitre 2). Les critères de stabilité de l'équilibre hydrostatique sont donc intimement liés à l'équation d'état du fluide et peuvent être très complexes.

1.4.4 Polytropes et masse de Chandrasekhar

Dans un objet dégénéré, la pression ne dépend essentiellement que de la densité d'électrons [$P \propto n^{5/3}$ dans un gaz non-relativiste, Eq. (1.45), et $P \propto n^{4/3}$ dans un gaz ultra-relativiste, Eq. (1.60)]. En supposant que cet objet soit *localement* à l'équilibre thermodynamique et puisse être caractérisé par une pression $P(r)$ et une densité $n(r)$ liées par Eqs. (1.45) ou (1.60), la condition d'équilibre hydrostatique (1.118) devient une équation structurale pour la densité dans l'objet.

Polytropes

De façon générale, on peut considérer un « polytrophe » caractérisé par l'équation d'état $P(\rho) = C\rho^\gamma$, où $\rho = nm$ est la densité de masse et m la masse des particules. L'exposant γ est appelé indice adiabatique, qu'il est commode de mettre sous la forme $\gamma = 1 + 1/p$, où p est l'indice polytropique. L'équation (1.118) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} C\gamma\rho(r)^{\gamma-1}\frac{d}{dr}\rho(r) &= -\rho(r)\frac{G}{r^2}\int_0^r dr' 4\pi r'^2\rho(r') \\ \Rightarrow C(1+p)r^2\frac{d}{dr}\rho(r)^{1/p} &= -G\int_0^r dr' 4\pi r'^2\rho(r'). \end{aligned} \quad (1.121)$$

En dérivant de nouveau par rapport à r , il vient :

$$C(1+p)r^2\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\rho(r)^{1/p}\right) = -4\pi G\rho(r). \quad (1.122)$$

On peut ensuite faire les changements de variable suivants pour adimensionnaliser cette équation différentielle :

$$w_p(r) = \left(\frac{\rho(r)}{\rho(0)}\right)^{1/p} \quad (1.123a)$$

$$z = \alpha_p r \text{ avec } \alpha_p^2 = \frac{4\pi G}{C(1+p)}\rho(0)^{(p-1)/p}. \quad (1.123b)$$

On obtient ainsi l'équation de Lane-Emden :

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d}{dz}w_p(z)\right) + w_p(z)^p = 0, \quad (1.124)$$

avec les conditions aux limites $w_p = 1$ et $dw_p/dz = 0$ en $z = 0$. Il existe quelques valeurs de p ($p = 0$, $p = 1$, $p = 5$) pour lesquelles la solution est analytique [3]. Pour $p = 1$ ($\gamma = 2$) par exemple,

$$w_1(z) = \frac{\sin z}{z}. \quad (1.125)$$

Le rayon R de l'objet est défini par le premier zéro $z_p = \alpha_p R$ de la fonction $w_p(z)$ ($z_1 = \pi$). On peut montrer que la solution de l'équation (1.124) n'a pas de zéros si $p > 5$, auquel cas l'objet reste diffus. Pour $p < 5$, on peut établir une relation entre la masse M et le rayon R de l'objet :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R dr' 4\pi r'^2\rho(r') \\ &= \frac{4\pi}{\alpha_p^3}\rho(0)\int_0^{z_p} dz z^2 w_p(z)^p \\ &= -\frac{4\pi}{\alpha_p^3}\rho(0)z_p^2\frac{dw_p}{dz}(z_p). \end{aligned} \quad (1.126)$$

Par conséquent, $\rho(0) \propto M^{2p/(3-p)}$ puisque $\alpha_p \propto \rho(0)^{(p-1)/(2p)}$, et :

$$R = \frac{z_p}{\alpha_p} \propto M^{(1-p)/(3-p)}. \quad (1.127)$$

Le rayon du polytrophe croît donc avec sa masse quand $0 \leq p < 1$ ($\gamma > 2$). La pression exercée par les gaz augmente en effet plus vite que leur poids lors d'un accroissement de masse à rayon constant, entraînant la dilatation du polytrophe. A l'inverse, le rayon décroît avec la masse quand $1 < p < 3$ ($\frac{4}{3} < \gamma < 2$), car le poids augmente plus vite que la pression des gaz (mais R reste fini pour toute masse M finie). C'est le cas en particulier pour les gaz dégénérés non relativistes. Le rayon est indépendant de M pour $p = 1$ ($\gamma = 2$). Le rayon du polytrophe croît également avec sa masse quand $3 < p < 5$ ($\frac{6}{5} < \gamma < \frac{4}{3}$), mais de tels objets sont dynamiquement instables. En fait, l'équilibre hydrostatique n'est stable que pour $p < 3$. Le cas limite $p = 3$ ($\gamma \rightarrow \frac{4}{3}$) est particulièrement intéressant puisqu'il correspond aux gaz dégénérés ultra-relativistes.

Cas des gaz dégénérés ultra-relativistes : masse de Chandrasekhar

Si $\gamma = \frac{4}{3}$, $M \propto R^0$ est indépendante du rayon et vaut d'après (1.126) :

$$M_C = -4\pi \left(\frac{C}{\pi G} \right)^{3/2} z_3^2 \frac{dw_3}{dz}(z_3) \quad (1.128)$$

appelée masse de Chandrasekhar. Dans le cas d'un gaz ultra-relativiste [Eq. (1.60)],

$$C = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{6\pi^2}{n_s} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{\mu_e m_H} \right)^{4/3} \quad (1.129)$$

où on a écrit $m = \mu_e m_H$, avec μ_e la masse moléculaire moyenne par électron et m_H la masse de l'atome d'hydrogène ($\mu_e \approx A/Z$ pour un gaz de l'élément à A nucléons dont Z protons). A partir de la solution numérique pour w_3 et z_3 , on obtient, tous calculs faits :

$$M_C = 1.44 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_\odot. \quad (1.130)$$

Seul un objet de cette masse (mais de rayon R arbitraire¹⁵) peut donc satisfaire l'équation de Lane-Emden pour $\gamma = \frac{4}{3}$. Cette « singularité » doit être interprétée avec soin. Tout d'abord, les indices adiabatiques $\gamma = \frac{5}{3}$ (gaz dénégéré non relativiste) et $\gamma = \frac{4}{3}$ (gaz dégénéré ultra-relativiste) sont des cas limites qui se cotoient à l'intérieur de l'objet (sa surface étant *de facto* non relativiste). Le caractère relativiste du gaz augmente au fur et à mesure que la masse de l'objet croît, et ce d'autant plus vite que son rayon diminue et que la densité augmente. On peut résoudre la condition d'équilibre hydrostatique (1.118) pour un gaz arbitrairement relativiste satisfaisant l'équation d'état (1.58) (voir le code `Chandrasekhar.py`). On montre (figure 1.5) que le rayon R de l'objet tend vers zéro lorsque $M \rightarrow M_C$: la masse de Chandrasekhar apparaît donc comme la masse limite que peut avoir un objet soutenu par la seule pression de dégénérescence des électrons avant qu'il ne s'effondre complètement. En pratique, l'objet va se transformer avant même d'avoir atteint cette masse, son rayon ne pouvant physiquement tendre vers zéro.

15. Autrement dit, la relation $z_3 = \alpha_3 R$ qui lie le rayon R à la densité centrale $\rho(0)$ conserve l'intégrale (1.126).

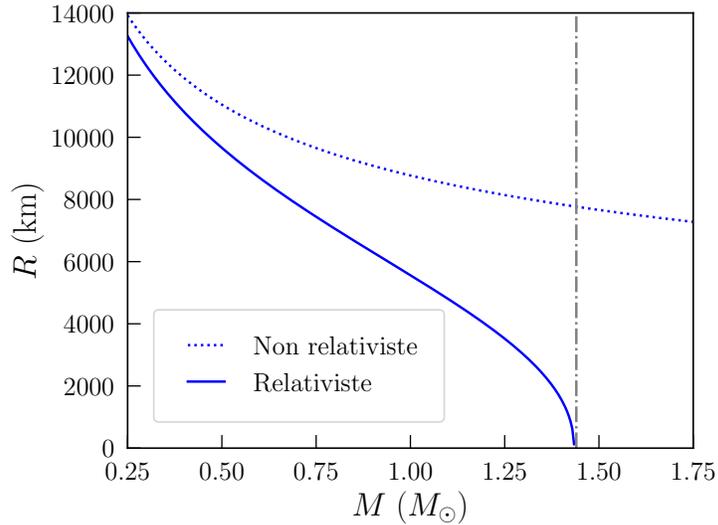


FIGURE 1.5 – Rayon R d'un corps dégénéré en fonction de sa masse M , pour un gaz non-relativiste [Equation d'état (1.45)], et pour un gaz relativiste [Equation d'état (1.58)]. La masse moléculaire par électron est $\mu_e = 2$ et les effets de température sont négligés ($T \rightarrow 0$). Dans un gaz relativiste, $R \rightarrow 0$ lorsque $M \rightarrow M_C = 1.44M_\odot$, la masse de Chandrasekhar indiquée par la ligne verticale.

Les naines blanches sont des « cadavres » d'étoiles légères, correspondant peu ou prou aux cendres dégénérées de leur cœur, généralement composées de carbone et d'oxygène (voir paragraphe 1.5 et chapitre 3). La masse de ces naines blanches ne peut donc dépasser $M_C = 1.44M_\odot$ ($A/Z = 2$). Une naine blanche qui accrete de la matière et s'approche de cette masse limite finit par s'effondrer ; l'énergie potentielle de pesanteur ainsi libérée la réchauffe jusqu'à ce que démarre la fusion du carbone et de l'oxygène, qui s'emballe car la pression est indépendante de la température dans un gaz dégénéré (donc les réactions nucléaires ne peuvent stopper l'effondrement avant qu'une grande partie de l'étoile ne s'embrace). L'explosion qui s'ensuit libère une formidable quantité d'énergie et disperse la naine blanche (supernova thermonucléaire de type I).

1.5 Fusion nucléaire et nucléosynthèse

1.5.1 Introduction

Une étoile est donc une structure auto-gravitante qui tend à s'effondrer sur elle-même sous l'effet de son propre poids. A l'équilibre hydrostatique (1.118), les forces de pesanteur sont contrebalancées par la pression du gaz (1.26) et du rayonnement (1.81) qui sont proportionnelles à (une puissance de) leur température. Comme une étoile rayonne, elle dissipe de l'énergie, prélevée (en l'absence d'autres sources¹⁶) sur son énergie potentielle interne de

16. L'énergie potentielle interne de pesanteur du Soleil, assimilé à une sphère homogène de rayon $R_\odot = 696\,340$ km et de masse $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg, est $U_\odot = -3GM^2/(5R) = -2.3 \times 10^{41}$ J [Eq. (1.116)]. En supposant que la totalité de cette énergie potentielle gagnée par la contraction du nuage de gaz protostellaire a été convertie en rayonnement avec une luminosité constante $L_\odot = 3.828 \times 10^{26}$ W, l'âge du Soleil serait

pesanteur (1.106) ; l'étoile se contracte donc progressivement et devrait laisser place *in fine* à un résidu dégénéré¹⁷ très dense et chaud qui va ensuite se refroidir lentement (la pression des gaz dégénérés étant largement indépendante de leur température). Toutefois, des réactions de fusion nucléaire (assemblage de noyaux légers en éléments plus lourds) s'amorcent dès que la température au coeur de l'étoile atteint une dizaine de millions de degrés Kelvin. Elles libèrent de l'énergie qui chauffe l'étoile et maintient l'équilibre entre les forces de pesanteur et la pression de la matière et du rayonnement tant que le « combustible » de ces réactions n'est pas épuisé.

La fusion de deux noyaux réclame des températures d'autant plus élevées qu'ils sont chargés (leur impulsion devant, en particulier, être suffisante pour qu'ils s'approchent à portée de l'interaction forte qui va les lier malgré la répulsion Coulombienne). Elle démarre donc naturellement avec l'hydrogène (plus exactement, les protons), élément à la fois le plus abondant et le plus léger dans les étoiles. La fusion de quatre protons produit un noyau d'hélium (particule α) selon des chemins réactionnels détaillés ci-dessous. La plupart des étoiles passent ainsi l'essentiel de leur vie sur la « séquence principale » où elles brûlent de l'hydrogène en hélium. Lorsque l'hydrogène s'épuise, le coeur de l'étoile se contracte de nouveau sous l'effet de la pesanteur qui reprend l'avantage. Sa température augmente alors jusqu'à permettre éventuellement la fusion de l'hélium en carbone et en oxygène. Le processus peut se poursuivre (en fonction de la masse initiale de l'étoile) jusqu'à la nucléosynthèse du fer, élément le plus stable. Au delà du fer, les processus de fusion sont endothermiques et ne permettent donc plus d'alimenter l'étoile en énergie. La nucléosynthèse des noyaux plus lourds que le fer se déroule dans des conditions particulières (capture rapide de neutrons dans les supernovas, ...) qui seront brièvement introduits ci-dessous.

1.5.2 La fusion de l'hydrogène

La fusion de l'hydrogène en hélium sur la séquence principale se déroule selon deux voies distinctes : la chaîne proton-proton et le cycle « catalytique » carbone-azote-oxygène (cycle CNO).

La chaîne proton-proton

La chaîne proton-proton (PP) est le mécanisme privilégié de fusion de l'hydrogène dans les étoiles de faible masse telles que le Soleil. Elle commence par la fusion de trois protons (${}^1_1\text{H}$) en hélium 3 (${}^3_2\text{He}$). Ces noyaux d'hélium 3 vont ensuite suivre différents chemins réactionnels (branches PP1, PP2, PP3) aboutissant tous à la synthèse d'hélium 4 (${}^4_2\text{He}$). Les premières étapes de la chaîne PP, communes à toutes les branches, sont :



L'énergie libérée est dissipée par les photons, les neutrinos et l'impulsion des particules. La fusion proton-proton est l'étape la plus limitante du processus. D'une part, les deux protons

$T = U_{\odot}/L_{\odot} = 19 \times 10^6$ ans – bien inférieur à l'âge géologique de la Terre notamment. Cette contradiction démontre l'existence d'une source d'énergie additionnelle à l'intérieur de l'étoile.

17. Si sa masse est inférieure à la masse de Chandrashekar (1.130), sinon elle s'effondre complètement sous son propre poids. Voir le chapitre 3 pour une discussion de l'évolution des étoiles et de leur devenir quand le combustible des réactions nucléaires est épuisé.

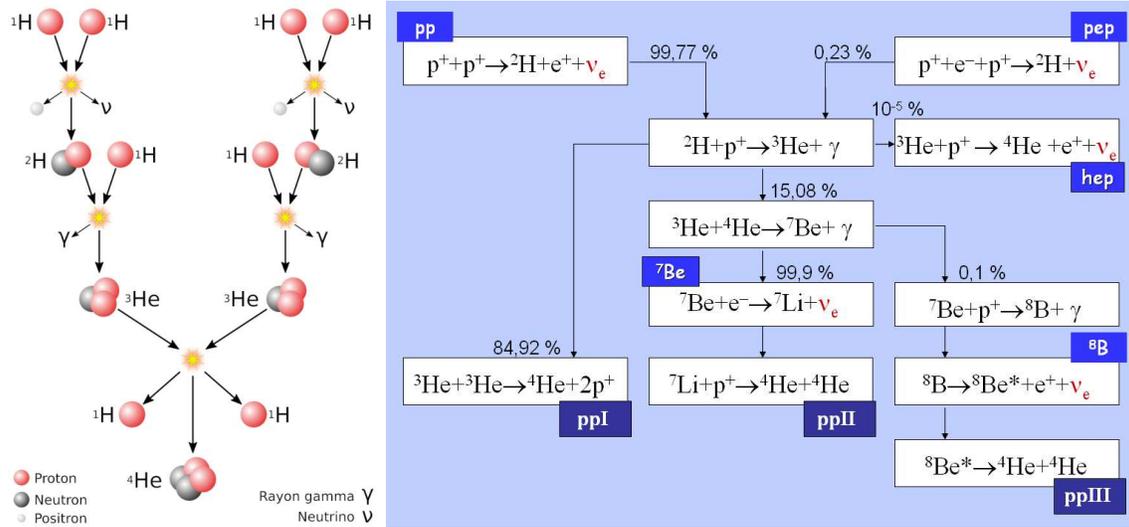


FIGURE 1.6 – A gauche, la branche PP1 de la chaîne proton-proton. A droite, prévalence des différentes branches de la chaîne proton-proton dans le Soleil [4]. Noter l’existence des rares branches « pep » et « hep » non discutées ici.

doivent tunneler au travers de la barrière Coulombienne qui les repousse pour entrer dans le puits d’interaction forte résiduelle qui va les lier. C’est pourquoi de telles réaction de fusion ne peuvent se produire qu’à des températures supérieures à une dizaine de millions de Kelvin où les protons ont assez d’énergie cinétique ($\simeq \frac{3}{2}kT$) pour s’approcher suffisamment. D’autre part, l’interaction faible doit agir rapidement au contact des protons pour transformer l’un d’entre eux en neutron, sinon ils se séparent. La durée de vie moyenne d’un proton dans le Soleil (avant qu’il ne fusionne avec un autre proton) serait ainsi de ≈ 9 milliards d’années. La durée de vie du deutérium ${}^2_1\text{D}$ (avant qu’il ne soit transformé en hélium ${}^3_2\text{He}$) est, à l’inverse, de l’ordre de la seconde. La chaîne PP s’arrête essentiellement à ce stade tant que la concentration en ${}^3_2\text{He}$ n’est pas suffisante pour alimenter PP1, PP2 ou PP3.

Branche PP1

PP1 est le mécanisme de nucléosynthèse de ${}^4_2\text{He}$ dominant pour des températures de 10 à 18×10^6 K (Fig. 1.6). Il s’agit de la fusion de deux noyaux ${}^3_2\text{He}$ accompagnée de la libération de deux protons « rendus » au combustible :



Le bilan total de la branche PP1 est donc :



La branche PP1 libère ainsi $2 \times (0.42 + 1.022 + 5.493) + 12.859 = 26.73$ MeV par noyau ${}^4_2\text{He}$ produit, dont 2.2% (0.59 MeV) dans les neutrinos¹⁸.

18. Ces neutrinos interagissent peu avec la matière et ne contribuent donc pas au chauffage et à la luminosité de l’étoile.

Branche PP2

PP2 domine pour des températures de 18 à 25×10^6 K et requiert la présence d'un premier noyau ${}^4_2\text{He}$:



La branche PP2 libère donc également $0.42 + 1.022 + 5.493 + 1.59 + 0.862 + 17.35 = 26.73$ MeV par noyau ${}^4_2\text{He}$ produit (dont 0.861 MeV dans le neutrino émis après la capture d'un électron par le beryllium).

Branche PP3

PP3 domine au delà de 25×10^6 K et commence comme PP2, mais le destin du beryllium est différent :

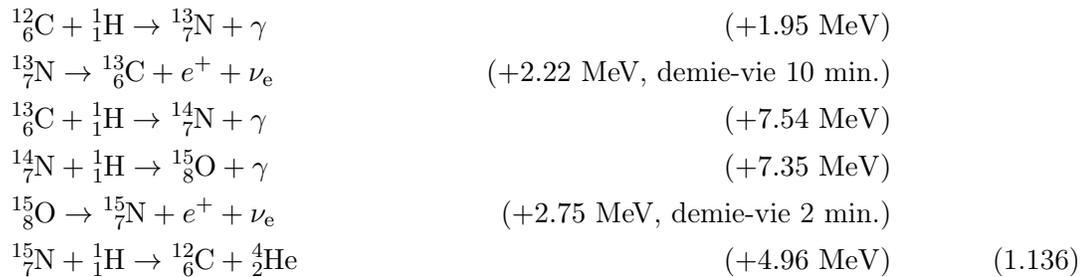


La chaîne PP3 libère, comme PP1 et PP2, 26.73 MeV par noyau ${}^4_2\text{He}$ produit (en incluant l'annihilation du positron), mais en grande partie (jusqu'à 14.06 MeV) dans le neutrino issu de la désintégration β^+ du Bore.

On notera que les éléments légers Be, Li et B sont instables à haute température ou consommés par les réactions de fusion (PP2, PP3), ce qui explique leur faible abondance dans l'univers. La branche PP1 représente 85% des réactions de fusion au coeur du Soleil (Fig. 1.6), tandis la branche PP3, bien que peu empruntée, est la source des neutrinos de plus haute énergie. La durée de vie moyenne d'un noyau ${}^3_2\text{He}$ dans le Soleil est de 400 ans.

Le cycle CNO

Le cycle carbone-azote-oxygène (CNO) est un mécanisme de fusion où le carbone sert de catalyseur (Fig. 1.7) :



Le carbone est recyclé et la réaction libère toujours 26.73 MeV par noyau ${}^4_2\text{He}$ produit (les énergies reportées ci-dessus incluent l'annihilation des positrons). Une partie de cette énergie est dissipée par les neutrinos (en moyenne 1.7 MeV). La barrière Coulombienne à la fusion

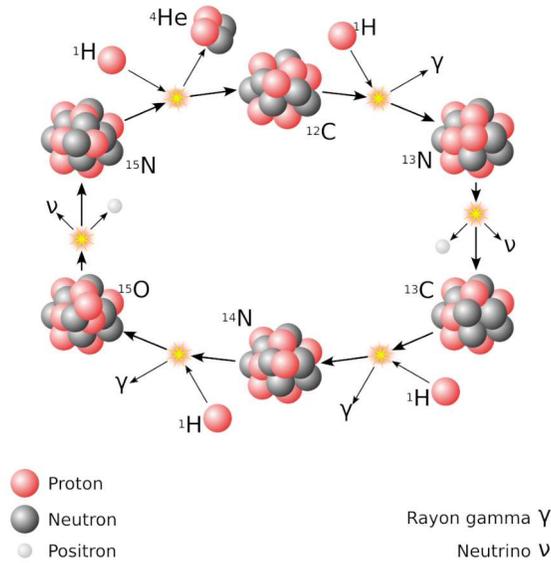


FIGURE 1.7 – Le cycle carbone-azote-oxygène (CNO) [5].

étant nettement plus élevée que dans la chaîne proton-proton, le cycle CNO démarre à bien plus haute température ($T > 15 \times 10^6$ K), mais son rendement croît très vite (Fig. 1.8) car il ne nécessite pas la transformation rapide d'un proton en neutron par l'interaction faible comme pour la nucléosynthèse du deutérium ${}^2_1\text{D}$. Ce rendement est également proportionnel à la *métallicité* de l'étoile (la concentration d'éléments plus lourds que H/He, dont le carbone, voir chapitre 2). La capture du proton par ${}^{14}_7\text{N}$ est l'étape la plus limitante du processus. Le cycle CNO représenterait 1.7% de la production de ${}^4_2\text{He}$ dans le Soleil [5].

Il existe des variants du cycle CNO. En particulier, la dernière étape peut produire (en moyenne une fois sur 2500) un noyau de ${}^{16}_8\text{O}$:



Ce noyau va lui-même subir différentes transformations, avec, *in fine*, la synthèse de ${}^4_2\text{He}$ et de ${}^{14}_7\text{N}$, lequel retourne dans le cycle CNO initial. Par conséquent, le cycle CNO modifie les proportions de carbone, d'oxygène, et d'azote dans le cœur de l'étoile. En régime stationnaire, $[{}^{12}_6\text{C}]/[{}^{13}_6\text{C}] \approx 3.5$ et ${}^{14}_7\text{N}$ devient le noyau majoritaire étant donné le caractère limitant de sa fusion avec un proton.

1.5.3 De l'hélium au fer

Les étoiles « évoluées » (qui ont brûlé l'hydrogène de leur cœur)¹⁹ peuvent fusionner des éléments de plus en plus lourds jusqu'à synthétiser du fer, noyau le plus stable.

19. La fusion dans les étoiles évoluées se poursuit généralement « en couches » : Le cœur brûle du carbone par exemple tandis que la fusion de l'hélium et de l'hydrogène continue (démarre, en fait) dans des coquilles périphériques où la température s'est suffisamment élevée pour le permettre. Si le cœur n'est pas convectif (voir chapitre 2), il y a en effet peu de brassage des combustibles/produits de fusion entre ces différentes couches.

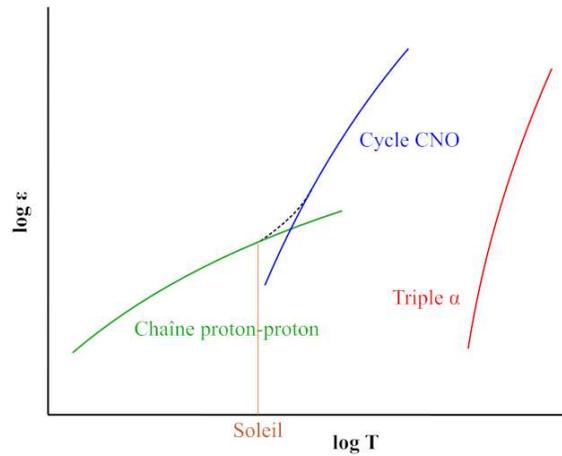


FIGURE 1.8 – Production relative d'énergie par la chaîne proton-proton, le cycle CNO et la réaction « triple α » en fonction de la température [4].

La réaction triple alpha

La fusion de deux particules α (${}^4_2\text{He}$) produit un noyau de ${}^8_4\text{Be}$ très instable (demi-vie 8.2×10^{-17} s) qui se désintègre en noyaux légers sauf s'il fusionne dans l'intervalle avec une troisième particule α . Cette capture produit un noyau de ${}^{12}_6\text{C}$ dans un état excité connu sous le nom d'état de Hoyle, qui se désintègre généralement en trois nouvelles particules α , mais relaxe environ une fois sur 2400 vers l'état fondamental (stable) de ${}^{12}_6\text{C}$. La température au centre de l'étoile doit donc dépasser $T \approx 100 \times 10^6$ K afin que la fusion des particules α soit suffisamment rapide pour produire des quantités significatives de carbone selon cette réaction « triple α » (Fig. 1.8) :



La réaction triple α libère donc 7.275 MeV. Certains des noyaux de ${}^{12}_6\text{C}$ synthétisés peuvent par ailleurs fusionner avec une particule α supplémentaire pour produire de l'oxygène :



Il est remarquable que la synthèse du carbone ne soit rendue possible que par la (quasi-)résonance entre l'état fondamental de ${}^8_4\text{Be}$ et l'état de Hoyle de ${}^{12}_6\text{C}$ qui favorise la capture d'une troisième particule α pendant la durée de vie très courte du premier. Sans cette résonance, le rendement de la nucléosynthèse du carbone serait trop faible pour expliquer son abondance dans l'univers.

Au delà du carbone

Les réactions de fusion peuvent se poursuivre jusqu'au fer si la masse de l'étoile, donc la température que peut atteindre le cœur le permet. La fusion du carbone démarre à

$T = 10^9$ K, et produit du sodium, du néon et du magnésium 23 :



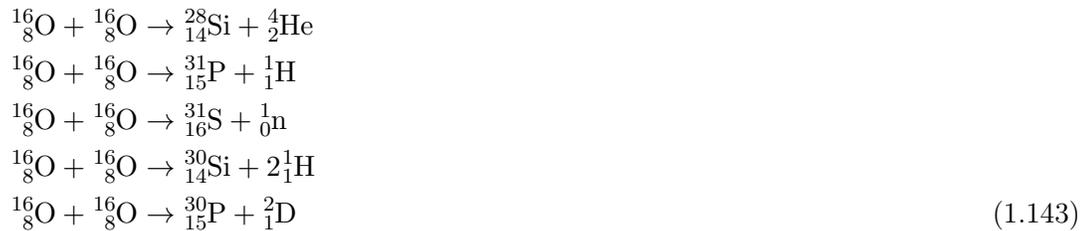
La dernière réaction domine au delà de $T = 1.1 \times 10^9$ K. Passé $T = 1.2 \times 10^9$ K, les noyaux de néon peuvent soit se photo-désintégrer, soit fusionner avec une particule α :



A ce stade, la fusion des isotopes du carbone et du néon avec des particules α produit également des neutrons :



Ces neutrons peuvent être capturés par d'autres noyaux qui voient leur nombre de nucléons augmenter (processus « s »). Les neutrons excédentaires finissent par se transformer en proton (désintégration β^- avec émission d'un électron et d'un neutrino). Tous les éléments jusqu'au Bismuth 209 peuvent en principe être synthétisés par le processus s . Si la température dépasse $T = 2 \times 10^9$ K, l'oxygène fusionne et produit différents nucléides. Les cinq principales réactions sont :

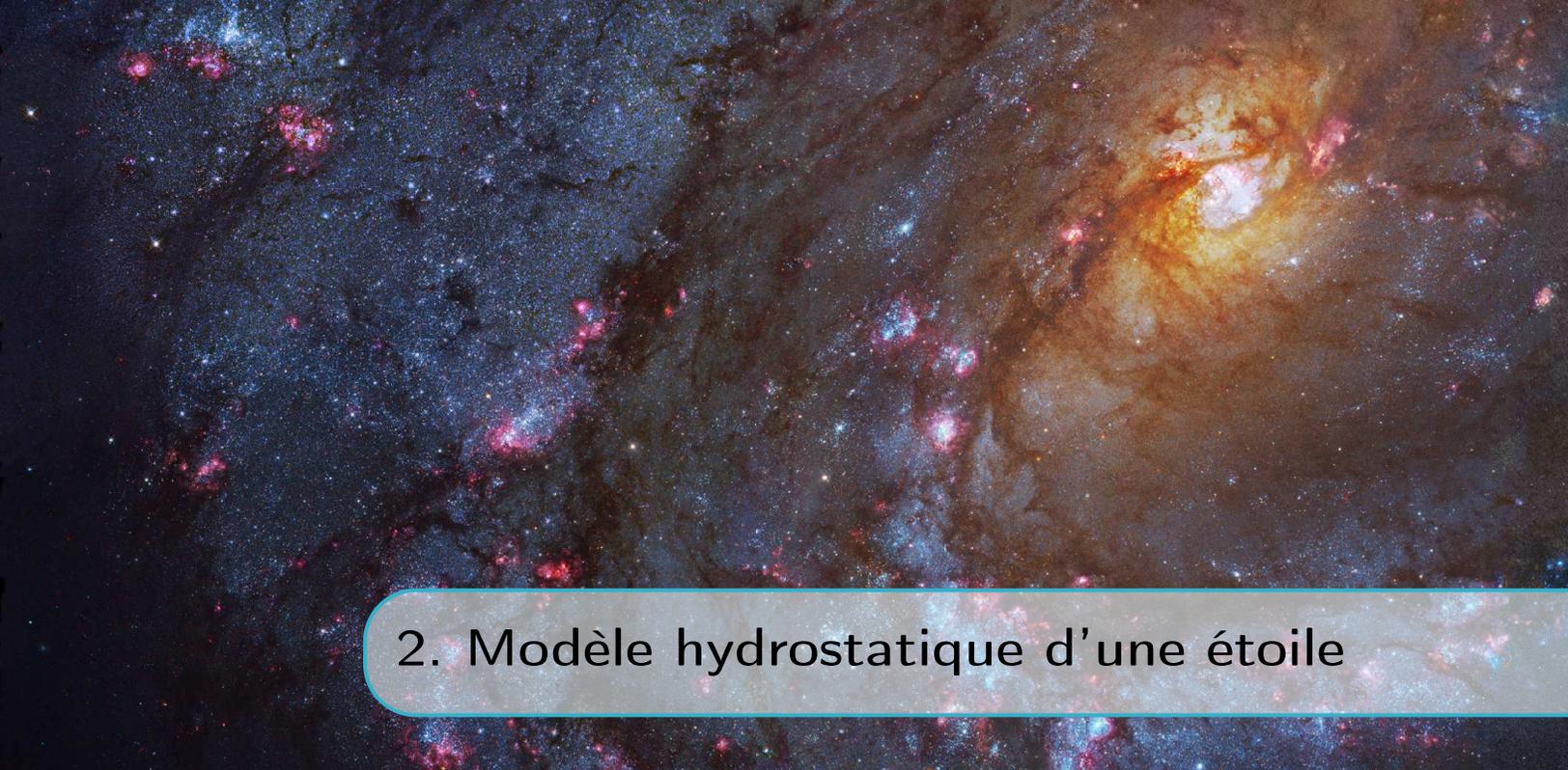


Les particules α , protons et neutrons libérés peuvent être capturés par d'autres noyaux et former chlore, argon, potassium, calcium, titane, ... Enfin, au delà de $T = 3 \times 10^9$ K, une partie du silicium est photo-désintégrée ; les produits de cette désintégration peuvent fusionner avec le silicium lui-même pour former tous les éléments jusqu'au fer 56, noyau le plus stable. L'étoile n'a plus alors que quelques jours à vivre. Son coeur de fer, dégénéré et thermonucléairement inerte, va s'effondrer sous son propre poids et l'onde de choc qui s'ensuit va disperser ses couches supérieures (supernova de type II).

1.5.4 La nucléosynthèse au delà du fer

Une partie des éléments au-delà du fer sont synthétisés au coeur des étoiles par le processus s décrit ci-dessus (s pour « slow », capture lente de neutrons). Lors de l'effondrement du coeur de fer d'une étoile massive, les protons capturent les électrons pour former une « étoile à neutrons » (voir un « trou noir », cf. chapitre 3). Un grand nombre de ces neutrons vont être dispersés par l'onde de choc et absorbés par les éléments légers (processus « r » plus rapide que la désintégration β^-) pour produire les éléments (et leurs isotopes) les plus lourds.

Toutefois, l'abondance des éléments tels que l'or, l'uranium et bien d'autres ne saurait être expliquée par les seules supernovas de type II. Ils proviennent plus vraisemblablement de processus r consécutifs à la collision d'étoiles à neutrons. En particulier, l'abondance de ces éléments dans le système solaire suggère qu'une telle collision a eu lieu dans le voisinage de la nébuleuse protostellaire du Soleil peu avant sa naissance.



2. Modèle hydrostatique d'une étoile

2.1 Hypothèses

Une étoile est fondamentalement un système hors-équilibre qui devrait être modélisé par des équations hydrodynamiques décrivant le transport de matière et d'énergie. Nous allons adopter ici une approche hydrostatique plus simple, qui suffit à rendre compte qualitativement, et souvent même quantitativement des propriétés d'une étoile. Nous allons supposer que l'étoile est une sphère isotrope dans laquelle la matière et le rayonnement – bien que globalement hors-équilibre – sont localement à l'équilibre thermodynamique et peuvent donc être caractérisés par une pression $P(r)$ et une température $T(r)$ liées par l'équation d'état des gaz parfaits (pour la matière) et la loi de Stefan-Boltzmann (pour les photons).

Dans les conditions de température qui règnent à l'intérieur une étoile, la plupart des atomes sont complètement ionisés¹, si bien que noyaux et électrons forment un plasma que l'on supposera classique (non dégénéré, non relativiste). Ce plasma est soumis aux forces de pesanteur qui tendent à effondrer l'étoile. L'énergie gravitationnelle libérée par la contraction des gaz chauffe l'étoile jusqu'à ce que les forces de pesanteur soient compensées par la pression cinétique des gaz [$P = nkT$] et du rayonnement [$P = 4\sigma T^4/(3c)$]. Comme l'étoile rayonne, elle perd de l'énergie prélevée sur son potentiel gravitationnel et devrait donc continuer à se contracter lentement pour finir sous la forme d'un résidu dégénéré (c'est le destin des « naines brunes »). Toutefois, des réactions nucléaires exothermiques (fusion des éléments légers) prennent le relais et alimentent l'étoile en énergie (la chauffent) dès que la température centrale devient suffisante. En régime stationnaire, la puissance libérée par ces réactions nucléaires doit être égale à la luminosité de l'astre. Nous allons maintenant établir les équations pour l'équilibre hydrostatique (paragraphe 2.2) et énergétique (paragraphe 2.3) de l'étoile.

1. Ce n'est pas nécessairement vrai pour les atomes « métalliques » (numéro atomique $Z > 2$) qui possèdent plus d'électrons, ni près de la surface de l'étoile, plus froide.

2.2 Bilan des forces

Pour calculer les forces de pesanteur, il faut pouvoir relier la densité de masse $\rho(r)$ dans l'étoile à la densité de particules (électrons et noyaux) $n(r)$.

2.2.1 Masse moléculaire moyenne et métallicité d'une étoile

Une étoile est essentiellement constituée d'hydrogène (masse atomique $m_{\text{H}} = 1.674 \times 10^{-27}$ kg pour $p_{\text{H}} = 2$ particules \equiv un proton et un électron), d'hélium (masse atomique $m_{\text{He}} \simeq 4m_{\text{H}}$ pour $p_{\text{He}} = 3$ particules \equiv un noyau α et deux électrons), et d'autres éléments (appelés « métaux » en astrophysique) en petites quantités (m_* , p_*). On note X et Y les abondances *en masse* de l'hydrogène et de l'hélium, et $Z = 1 - X - Y$ celle des métaux. La « métallicité » Z est un paramètre important² qui conditionne la nucléosynthèse (cycle CNO) et le transfert radiatif dans l'étoile (voir paragraphe 2.3). On a donc :

$$n = \rho \left(X \frac{p_{\text{H}}}{m_{\text{H}}} + Y \frac{p_{\text{He}}}{m_{\text{He}}} + Z \frac{p_*}{m_*} \right) = \frac{\rho}{m_{\text{H}}} \left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \right) = \frac{\rho}{4m_{\text{H}}} (6X + Y + 2), \quad (2.1)$$

où on a fixé³ $p_*/m_* \approx 1/(2m_{\text{H}})$. Soit encore

$$\rho = n\mu m_{\text{H}} \text{ où } \mu = \frac{4}{6X + Y + 2} \quad (2.2)$$

est la masse moyenne réduite des particules. C'est aussi (par définition de la mole) la masse moléculaire moyenne des particules en g/mol. On suppose en première approximation les abondances homogènes dans l'étoile, même si elles évoluent avec les réactions thermonucléaires, en particulier dans le coeur. Pour le Soleil⁴, $X_{\odot} = 0.7346$, $Y_{\odot} = 0.2485$, $Z_{\odot} = 0.0169$ et $\mu_{\odot} = 0.6$ g/mol. En négligeant Z devant X et Y , la densité d'électrons dans l'étoile est en outre :

$$n_{\text{e}} \approx \rho \left(X \frac{1}{m_{\text{H}}} + Y \frac{2}{m_{\text{He}}} \right) \approx \frac{\rho}{m_{\text{H}}} \left(X + \frac{1}{2}Y \right) \approx \frac{\rho}{2m_{\text{H}}} (1 + X), \quad (2.3)$$

et celle des noyaux :

$$n_{\text{n}} \approx \rho \left(X \frac{1}{m_{\text{H}}} + Y \frac{1}{m_{\text{He}}} \right) \approx \frac{\rho}{m_{\text{H}}} \left(X + \frac{1}{4}Y \right) \approx \frac{\rho}{4m_{\text{H}}} (1 + 3X). \quad (2.4)$$

2. On introduit également l'indice de métallicité :

$$[M/H] = \log_{10} \frac{N_{\text{M}}/N_{\text{H}}}{(N_{\text{M}}/N_{\text{H}})_{\odot}} \approx \log_{10} \frac{Z}{Z_{\odot}},$$

où N_{M} et N_{H} sont les abondances *atomiques* des métaux et de l'hydrogène dans l'étoile, et $(N_{\text{M}}/N_{\text{H}})_{\odot}$ est leur rapport dans la photosphère solaire. La métallicité est représentative de l'âge et de la génération d'une étoile, les éléments métalliques provenant en général de l'enrichissement préalable du milieu interstellaire par des supernovas. Les étoiles les plus vieilles (population II) sont très pauvres en métaux, alors que les étoiles les plus jeunes (population I) sont plus riches.

3. C'est approximativement le cas pour les principaux métaux : C ($m_* \simeq 12m_{\text{H}}$, $p_* = 7$), N ($m_* \simeq 14m_{\text{H}}$, $p_* = 8$), O ($m_* \simeq 16m_{\text{H}}$, $p_* = 9$)...

4. La métallicité du Soleil varie selon les sources de $Z_{\odot} = 0.013$ à $Z_{\odot} = 0.018$ [2, 6].

2.2.2 Equilibre hydrostatique

A l'équilibre hydrostatique, la pression $P(r)$ dans l'étoile doit vérifier la condition (1.118) :

$$\frac{d}{dr}P(r) = \frac{d}{dr}[P_m(r) + P_r(r)] = -\rho(r)g(r) = -\rho(r)\frac{GM(r)}{r^2}, \quad (2.5a)$$

où :

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (2.5b)$$

est la masse totale enclose dans la sphère de rayon r , et :

$$P_m(r) = \frac{\rho(r)}{\mu} N_A k T(r) = \frac{\rho(r)}{\mu} \mathcal{R} T(r) \quad (2.5c)$$

$$P_r(r) = \frac{1}{3} a T(r)^4 = \frac{4\sigma}{3c} T(r)^4 \quad (2.5d)$$

sont respectivement la pression de la matière et du rayonnement à la température $T(r)$ (avec $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ le nombre d'Avogadro, $\mathcal{R} = N_A k = 8.314$ J/K/mol la constante des gaz parfaits, et $\mu = 0.6$ g/mol pour le Soleil).

L'équation (2.5) couple la densité de masse $\rho(r)$ à la température $T(r)$ dans l'étoile (laquelle donne la pression $P(r)$). Il manque donc une deuxième équation pour compléter ce système, dérivée du bilan énergétique de l'étoile. Néanmoins, nous pouvons déjà utiliser (2.5) pour estimer les températures et pressions régnant dans des étoiles comme le Soleil.

2.2.3 Premières estimations

A cet effet, nous allons supposer en toute première approximation que le Soleil est une sphère homogène de rayon $R_\odot = 696\,340$ km et de masse $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg (donc de densité $\rho_\odot = 3M_\odot/(4\pi R_\odot^3) = 1414$ kg/m³) [2]. Par conséquent,

$$\mathcal{M}(r \leq R) = M_\odot \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^3 \text{ et } \mathcal{M}(r \geq R) = M_\odot. \quad (2.6)$$

A l'intérieur du Soleil,

$$\frac{d}{dr}P(r) = -\rho_\odot \frac{GM_\odot}{r^2} = -\frac{3GM_\odot^2}{4\pi R_\odot^6} r, \quad (2.7)$$

si bien que :

$$P(0) - P(R) = \frac{3GM_\odot^2}{8\pi R_\odot^4}. \quad (2.8)$$

En négligeant $P(R)$ devant $P(0)$, la pression centrale vaut donc :

$$P(0) = \frac{3GM_\odot^2}{8\pi R_\odot^4} \approx 135\,000 \text{ GPa}, \quad (2.9)$$

soit 1.34 milliards d'atmosphères. On estime ensuite la température centrale $T(0)$ en supposant $P(0) \approx P_m(0)$:

$$T(0) = \frac{\mu_\odot P(0)}{\rho_\odot \mathcal{R}} = \frac{\mu_\odot GM_\odot}{\mathcal{R} 2R_\odot} \approx 7 \times 10^6 \text{ K}. \quad (2.10)$$

Cette valeur – quoi que du bon ordre de grandeur – est sous-estimée car la densité, et donc la pression et la température augmentent au coeur du Soleil (en réalité $T(0) \approx 15 \times 10^6 \text{ K}$).

2.3 Bilan et transfert énergétique

Les réactions thermonucléaires au coeur de l'étoile libèrent de l'énergie qui est transférée vers sa surface. On appelle $\mathcal{L}(r)$ la quantité d'énergie traversant chaque unité de temps une coquille de rayon r (débit d'énergie ou puissance). On note également $\varepsilon_n(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_n(r)$ la quantité d'énergie thermonucléaire produite au point \mathbf{r} par unité de temps et de masse (puissance massique). En régime stationnaire, la conservation de l'énergie implique :

$$\mathcal{L}(r + dr) - \mathcal{L}(r) = 4\pi r^2 dr \rho(r) \varepsilon_n(r), \quad (2.11)$$

soit :

$$\frac{d}{dr} \mathcal{L}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon_n(r), \quad (2.12)$$

qui s'intègre immédiatement :

$$\mathcal{L}(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \varepsilon_n(r'). \quad (2.13)$$

C'est ce débit d'énergie qui chauffe l'étoile et entretient sa luminosité. On doit par conséquent avoir :

$$\mathcal{L}(r \rightarrow \infty) = L \quad (2.14)$$

où L est la luminosité de l'étoile [Eq. (1.78)] ; autrement dit :

$$L = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \varepsilon_n(r) \approx 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r) \varepsilon_n(r), \quad (2.15)$$

est la puissance totale produite par les réactions thermonucléaires (avec R le rayon de l'étoile, à définir). Nous allons maintenant discuter quels sont les mécanismes qui permettent de transférer l'énergie dans l'étoile et de maintenir l'équilibre thermodynamique local : la conduction (échange d'énergie cinétique au cours des collisions entre particules), le transfert radiatif (par les photons), et la convection (transport de matière à grande échelle).

2.3.1 Conduction

Tout ou partie de cette énergie peut-être transférée par échange de quantité de mouvement entre (quasi-)particules (conduction thermique) ; les étoiles étant essentiellement gazeuses, et dans l'ensemble relativement peu denses (en dehors du coeur), la conduction thermique y est néanmoins peu efficace⁵.

5. Exception faite des naines blanches et étoiles à neutrons où la matière est dégénérée voir cristallisée.

2.3.2 Transfert radiatif

L'énergie peut-être transportée par les photons, lesquels vont être diffusés et absorbés par les gaz, permettant ainsi la thermalisation du couple lumière/matière ; pour décrire ce phénomène, on introduit le coefficient d'extinction (ou opacité) $\kappa(\nu)$ tel que la luminance énergétique spectrale d'un faisceau de lumière traversant une épaisseur dl de matière soit atténuée de :

$$dL(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})\kappa(\nu, \mathbf{r})L(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r})dl, \quad (2.16)$$

avec (Θ, Φ) la direction d'émission et ν la fréquence des photons (loi de Beer-Lambert). Si le libre parcours moyen $\ell(\nu) = [\rho(\mathbf{r})\kappa(\nu, \mathbf{r})]^{-1}$ des photons est constant,

$$L(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r}) \propto e^{-l/\ell(\nu)}. \quad (2.17)$$

En toute généralité, il convient d'ajouter un terme « source » $j(\nu, \mathbf{r})$ supposé isotrope :

$$dL(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})[j(\nu, \mathbf{r}) - \kappa(\nu, \mathbf{r})L(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r})]dl. \quad (2.18)$$

Ce terme source décrit notamment l'émission *spontanée* dans le milieu⁶. A l'équilibre thermodynamique à la température T ,

$$L(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r}) = L_{\text{eq}}(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (2.19)$$

est indépendante de la position (loi de Planck) ; $\kappa(\nu, \mathbf{r})$ et $j(\nu, \mathbf{r})$ doivent donc être liées par la relation :

$$dL(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \frac{j_{\text{eq}}(\nu, \mathbf{r})}{\kappa_{\text{eq}}(\nu, \mathbf{r})} = L_{\text{eq}}(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}. \quad (2.20)$$

Dans le Soleil, $\ell(\nu)$ varie de 0.01 à 1 cm en dehors de la photosphère (la surface visible de l'étoile, où les gaz deviennent transparents). Les étoiles sont donc des milieux relativement opaques.

Equation de transfert radiatif

Nous allons maintenant établir l'équation de transfert radiatif en symétrie et coordonnées sphériques. En mesurant l'angle d'émission Θ par rapport au rayon vecteur \mathbf{r} (voir Fig. 2.1), la symétrie de révolution autour de cet axe impose $L(\Theta, \Phi, \nu, \mathbf{r}) \equiv L(\Theta, \nu, r)$. Imaginons un élément de surface dS en (r, θ, φ) , émettant dans la direction (Θ, Φ) vers un autre élément de surface dS' interceptant le faisceau en $(r' = r + dr, \theta' = \theta + d\theta, \varphi' = \varphi + d\varphi)$ avec des angles $(\Theta' = \Theta + d\Theta = \Theta - d\theta, \Phi' = \Phi)$. La loi de Beer-Lambert pour la luminance énergétique spectrale s'écrit :

$$L(\Theta + d\Theta, \nu, r + dr) - L(\Theta, \nu, r) = \rho(r)[j(\nu, r) - \kappa(\nu, r)L(\Theta, \nu, r)]dl. \quad (2.21)$$

6. L'émission stimulée le long du chemin parcouru par les photons, proportionnelle par définition à L , est incluse dans κ ; en l'absence du terme source j , la relation de bilan détaillé (2.20) n'a pas de solution physique et l'équilibre thermodynamique ne peut être atteint. La thermodynamique démontre ainsi l'existence d'une émission spontanée que seule une quantification appropriée des champs révèle en mécanique quantique.

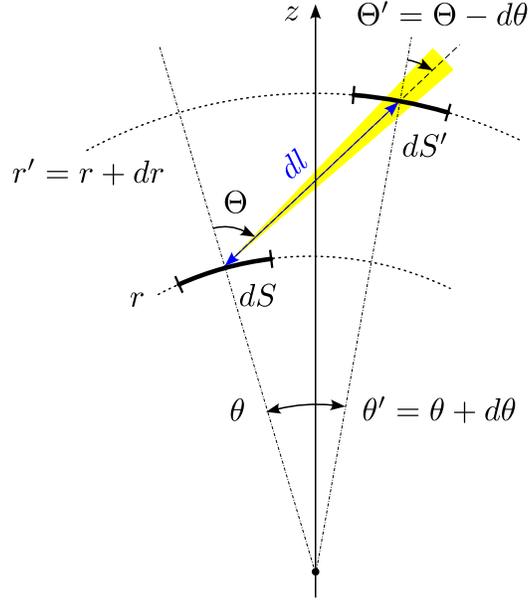


FIGURE 2.1 – Schéma de principe pour l'établissement de l'équation de transfert radiatif en coordonnées et symétrie sphériques. Un faisceau de lumière émis depuis un élément de surface dS avec un angle Θ est intercepté par un élément dS' avec un angle $\Theta' = \Theta - d\theta$; il aura parcouru une longueur $dl = dr / \cos \Theta$ et subi une atténuation $\rho(r)\kappa(r)dl$.

Soit (en laissant les variables implicites par souci de lisibilité, cf. notations du paragraphe 1.3) :

$$\frac{\partial L_{\Omega,\nu}}{\partial r} dr + \frac{\partial L_{\Omega,\nu}}{\partial \Theta} d\Theta = \rho[j_\nu - \kappa_\nu L_{\Omega,\nu}] dl. \quad (2.22)$$

Ensuite,

$$dr = dl \cos \Theta \quad (2.23a)$$

$$r d\theta = -r d\Theta = dl \sin \Theta, \quad (2.23b)$$

si bien que :

$$\frac{\partial L_{\Omega,\nu}}{\partial r} \cos \Theta - \frac{1}{r} \frac{\partial L_{\Omega,\nu}}{\partial \Theta} \sin \Theta = \rho[j_\nu - \kappa_\nu L_{\Omega,\nu}]. \quad (2.24)$$

On peut tout d'abord intégrer cette équation sur la fréquence ν ; en supposant dans un premier temps $\kappa_\nu \equiv \kappa$ constant,

$$\frac{\partial L_\Omega}{\partial r} \cos \Theta - \frac{1}{r} \frac{\partial L_\Omega}{\partial \Theta} \sin \Theta = \rho[j - \kappa L_\Omega]. \quad (2.25)$$

On multiplie ensuite le tout par $\cos \Theta$ et on intègre sur l'angle solide Ω . Comme L_Ω a la symétrie de révolution, on peut utiliser les relations (1.85) :

$$\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \cos^2 \Theta L_\Omega = \hat{\mu}_2(L_\Omega) = cP_r, \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\Theta \sin^2 \Theta \cos \Theta \frac{\partial L_\Omega}{\partial \Theta} \\ = - \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\Theta (3 \cos^2 \Theta \sin \Theta - \sin \Theta) L_\Omega \text{ (par parties)} \\ = -3\hat{\mu}_2(L_\Omega) + \hat{\mu}_0(L_\Omega) = -3cP_r + c\eta_r, \end{aligned} \quad (2.26b)$$

$$\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \cos \Theta L_\Omega = \hat{\mu}_1(L_\Omega) = F_r, \quad (2.26c)$$

$$\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \cos \Theta j = 0 \text{ (} j \text{ isotrope)}. \quad (2.26d)$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dr}P_r(r) + \frac{1}{r}[3P_r(r) - \eta_r(r)] = -\frac{1}{c}\rho(r)\kappa(r)F_r(r). \quad (2.27)$$

Cette équation ne présuppose pas l'équilibre thermodynamique local et s'applique donc quelle que soit la fonction de distribution des photons. Si on admet maintenant que les photons sont localement à l'équilibre thermodynamique à la température $T(r)$, alors $P_r(r) = \eta_r(r)/3 = 4\sigma T(r)^4/(3c)$ et

$$\frac{d}{dr}\eta_r(r) = -\frac{3}{c}\rho(r)\kappa(r)F_r(r), \quad (2.28)$$

soit encore :

$$\frac{d}{dr}T(r) = -\frac{3}{16\sigma} \frac{\rho(r)\kappa(r)}{T(r)^3} F_r(r). \quad (2.29)$$

Enfin, si l'énergie est *exclusivement* transférée par le rayonnement, la densité de flux radiatif est $F_r(r) = \mathcal{L}(r)/(4\pi r^2)$, de sorte que :

$$\frac{d}{dr}T(r) = -\frac{3}{16\sigma} \frac{\rho(r)\kappa(r)}{T(r)^3} \frac{\mathcal{L}(r)}{4\pi r^2} = -\frac{3}{16\sigma} \frac{1}{\ell(r)T(r)^3} \frac{\mathcal{L}(r)}{4\pi r^2}. \quad (2.30)$$

Cette équation lie le gradient de température⁷ au débit d'énergie et au libre parcours moyen des photons dans l'étoile. Lorsque la matière absorbe la lumière, elle gagne de l'énergie et

7. Il s'agit stricto-sensu de la température des photons, laquelle est supposée égale à celle de la matière en vertu des hypothèses d'équilibre local et des échanges entre eux décrits par j_ν et κ_ν . En particulier, si $\kappa_\nu \approx 0$, les photons émis par le coeur traversent l'étoile sans interagir avec la matière. La « température » des photons (celle du coeur, si tant est qu'on puisse assimiler son rayonnement à celui d'un corps noir) se découple alors de celle de la matière. L'étoile n'apparaît alors plus comme un système de matière et de photons à l'équilibre qui rayonne comme un corps noir à sa température de surface, et les hypothèses d'équilibre local faites jusqu'ici ne sont plus valables. De façon générale, l'établissement d'un équilibre local suppose que le libre parcours moyen ℓ des photons reste petit devant les longueurs caractéristiques de variation de la température $\approx T/(dT/dr)$.

se réchauffe au dépend du bain de photons qui perd de l'énergie [Eq. (2.28)] et se refroidit. Comme matière et rayonnement restent partout à l'équilibre, le gradient de température est négatif et la longueur d'onde moyenne des photons augmente progressivement. On peut alternativement introduire la conductivité thermique λ_{th} du milieu telle que :

$$F_{\text{r}} = -\lambda_{\text{th}} \frac{dT}{dr} \Rightarrow \lambda_{\text{th}} = \frac{16}{3} \sigma \ell T^3. \quad (2.31)$$

La conductivité thermique est d'autant plus importante, et la température d'autant plus homogène que le libre parcours moyen des photons est grand (donc que ceux-ci transfèrent l'énergie sur de longues distances). Au fur et à mesure que la température diminue, les photons ont de moins en moins d'énergie [$E = h\nu \propto kT$] et de modes pour les porter [$\rho(\nu) \propto \nu^2 \propto (kT)^2$], de sorte que $dT/dr \propto T^{-3}$ augmente pour un même débit d'énergie absorbée (il faut « vider » les modes de photons sur une gamme d'énergie croissante). Ce fort gradient de température peut finir par déstabiliser l'équilibre hydrostatique et déclencher des mouvements de convection (voir ci-dessous).

Opacité moyenne de Rosseland

En pratique, κ_{ν} est très dépendent de la fréquence des photons. Il agrège les contributions de différents mécanismes : absorption entre états liés d'atomes neutres ou incomplètement ionisés (transitions lié \rightarrow lié), ionisation de ces mêmes atomes (transitions lié \rightarrow libre), collisions électrons-ions inélastiques (*Bremsstrahlung* inverse, transitions libre \rightarrow libre) et diffusion Compton des photons... On peut définir un κ moyen ou effectif à partir de la décomposition spectrale (2.24) à l'équilibre thermodynamique local. En multipliant d'abord par $\cos \Theta$, puis en intégrant sur l'angle solide, et en négligeant les termes source et $\partial L_{\Omega}/\partial \Theta$ qu'on sait ne pas contribuer, il vient :

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d}{dr} L_{\Omega, \nu}(\nu, T) = -\rho \kappa(\nu) F_{\text{r}}(\nu), \quad (2.32)$$

où $F_{\text{r}}(\nu)$ est le flux radiatif par unité de fréquence. Soit :

$$F_{\text{r}}(\nu) = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa(\nu)} \frac{d}{dr} L_{\Omega, \nu}(\nu, T) = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa(\nu)} \frac{\partial}{\partial T} L_{\Omega, \nu}(\nu, T) \frac{dT}{dr}. \quad (2.33)$$

En intégrant enfin sur la fréquence,

$$F_{\text{r}} = \int_0^{\infty} d\nu F_{\text{r}}(\nu) = -\frac{4\pi}{3\rho} \frac{dT}{dr} \int_0^{\infty} d\nu \frac{1}{\kappa(\nu)} \frac{\partial}{\partial T} L_{\Omega, \nu}(\nu, T), \quad (2.34)$$

que l'on cherche à identifier avec (2.27) :

$$\begin{aligned} F_{\text{r}} &= -\frac{c}{\rho\kappa} \frac{d}{dr} P_{\text{r}} = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa} \int_0^{\infty} d\nu \frac{d}{dr} L_{\Omega, \nu}(\nu, T) \\ &= -\frac{4\pi}{3\rho} \frac{dT}{dr} \int_0^{\infty} d\nu \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dT} L_{\Omega, \nu}(\nu, T). \end{aligned} \quad (2.35)$$

On peut à cet effet introduire la « moyenne de Rosseland » $\kappa(T)$ définie par la relation :

$$\frac{1}{\kappa(T)} = \left[\int_0^{\infty} d\nu \frac{\partial}{\partial T} L_{\Omega, \nu}(\nu, T) \right]^{-1} \int_0^{\infty} d\nu \frac{1}{\kappa(\nu)} \frac{\partial}{\partial T} L_{\Omega, \nu}(\nu, T), \quad (2.36)$$

avec $L_{\Omega,\nu}(\nu, T)$ donné par la loi de Planck (1.72). Ce $\kappa(T)$ moyen présente typiquement un pic vers $T \approx 50\,000$ K (voir Figure 2.2). En effet, à plus basse température, les atomes ne sont plus – ou seulement partiellement – ionisés. L’absorption libre \rightarrow libre (collisions électrons-ions) diminue donc, tandis que l’absorption lié \rightarrow libre devient de plus en plus difficile. La température est, en particulier, rapidement insuffisante pour ioniser l’hydrogène (mais pas son ion H^- qui peut dominer l’opacité malgré sa faible abondance). L’absorption lié \rightarrow lié entre niveaux atomiques ne se produit quant à elle qu’à des fréquences de résonance bien particulières. Le milieu se fait ainsi de plus en plus transparent. Dans ce régime, le transfert d’énergie se fait cependant plutôt par convection (voir paragraphe 2.3.3) que par radiation. A plus haute température, presque tous les atomes sont à l’inverse complètement ionisés ; il y a donc de moins en moins de transitions lié \rightarrow lié ou lié \rightarrow libre, tandis que le Bremsstrahlung inverse devient inefficace à haute énergie. Les références [7-9] proposent les comportements haute température suivants pour l’opacité (lois de Kramers) :

— Pour les transitions lié \rightarrow libre,

$$\kappa(T) = (4.34 \times 10^{21} \text{ m}^2/\text{kg}) \frac{g_{\text{bf}}}{t} (1 + X) Z \rho T^{-3.5}. \quad (2.37)$$

— Pour les transitions libre \rightarrow libre,

$$\kappa(T) = (3.68 \times 10^{18} \text{ m}^2/\text{kg}) g_{\text{ff}} (1 + X) (1 - Z) \rho T^{-3.5}. \quad (2.38)$$

— Pour la diffusion Compton,

$$\kappa(T) = (0.02 \text{ m}^2/\text{kg}) (1 + X). \quad (2.39)$$

Dans ces expressions, ρ est exprimée en kg/m^3 et T en Kelvins. g_{bf} et g_{ff} sont des « facteurs de Gaunt » proches de 1, et t est un « facteur de guillotine » destiné à corriger la surestimation du nombre d’électrons liés à haute température ($t = 1 - 100$, typiquement $t \simeq 10$). On pourra faire l’approximation suivante :

$$t \approx 0.71 [\rho(1 + X)]^{0.2}. \quad (2.40)$$

Le libre parcours moyen $\ell \equiv (\rho\kappa)^{-1}$ est toujours proportionnel à la densité d’électrons $n_e \propto \rho(1 + X)$. L’absorption lié \rightarrow libre est en effet proportionnelle à la densité de métaux ρZ car les atomes conservent d’autant plus d’électrons liés qu’ils sont lourds, et à la vitesse $\propto n_e$ à laquelle les niveaux ionisés sont repeuplés. L’absorption libre \rightarrow libre est proportionnelle à la densité d’électrons n_e et à la densité totale ρ (s’agissant de collisions inélastiques électrons-ions). L’absorption libre \rightarrow libre a donc tendance à dominer dans les étoiles de population II très pauvres en métaux, alors que l’absorption lié \rightarrow libre prend le pas dans les étoiles de population I, plus riches en éléments lourds. La diffusion Compton est simplement proportionnelle à la densité d’électrons n_e pouvant interagir avec un photon. Dans sa limite élastique (diffusion Thomson), l’opacité est indépendante de la température.

L’opacité moyenne de Rosseland peut être calculée et tabulée à partir d’une solution numérique des équations décrivant les interactions lumière-matière dans l’étoile et les spectres d’absorption des éléments constituants dans leurs états d’ionisation possibles. Des tables de $\kappa(\rho, T)$ pour différentes compositions stellaires sont ainsi disponibles dans la littérature et

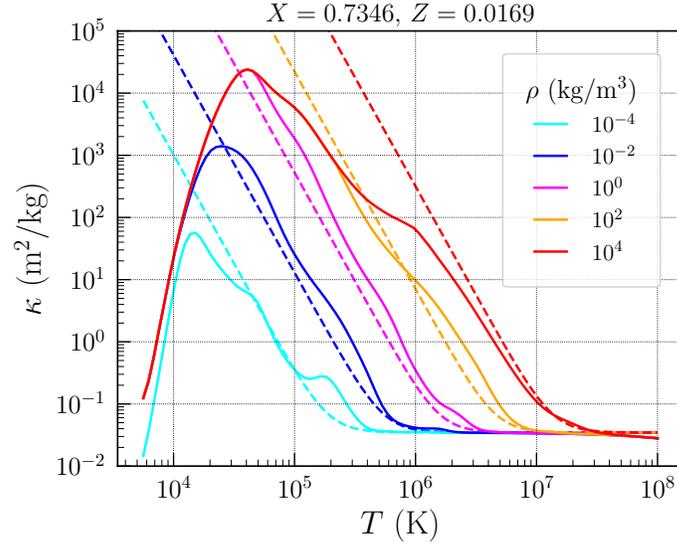


FIGURE 2.2 – Comparaison entre les opacités OPAL [10] (traits pleins) et les lois de Kramers (2.37)-(2.40) (tirets) pour une composition solaire $X = 0.7346$ et $Z = 0.0169$. Les opacités $\kappa(\rho, T)$ sont tracées en fonction de la température T pour différentes densités ρ représentatives.

mises à disposition de la communauté scientifique, telles que celles du projet OPAL [10]. Les opacités OPAL pour la composition solaire sont comparées aux lois de Kramers (2.37)–(2.40) sur la figure 2.2 (voir les codes `opacity.py` et `star.py`). Les lois de Kramers reproduisent raisonnablement l'opacité pour des températures $T > 100\,000$ K.

Le transfert radiatif est-il rapide ?

Les équations de transfert radiatif ont été établies en régime stationnaire et ne disent donc rien de l'échelle de temps nécessaire pour atteindre ce régime ou y revenir après une perturbation. Ce temps caractéristique est par nature comparable à celui que met un photon émis au coeur de l'étoile pour atteindre sa surface. On peut donner une estimation, certes grossière, mais instructive de la durée de ce transit avec un modèle diffusif simple. On suppose à cet effet que les photons effectuent des vols libres dans l'étoile entrecoupés de collisions (diffusion ou absorption/réémission) desquelles ils ressortent dans une direction aléatoire. La position d'un photon émis du centre à $t = 0$ est, au bout de N collisions :

$$\mathbf{R}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i, \quad (2.41)$$

où \mathbf{r}_i est le chemin parcouru entre les collisions $i - 1$ et i . Par conséquent, on a en moyenne

$$\langle \mathbf{R}_N^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{r}_i^2 \rangle, \quad (2.42)$$

car $\langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{0}$ sur chaque chemin, lesquels sont par ailleurs indépendants. En assimilant $\langle \mathbf{r}_i^2 \rangle \approx \ell^2$ au libre parcours moyen carré,

$$\langle \mathbf{R}_N^2 \rangle \approx N\ell^2. \quad (2.43)$$

Enfin, le nombre de collisions subies au temps t est $N \approx t/\Delta t$, où $\Delta t = \ell/c$ est le temps moyen séparant deux d'entre elles, si bien que :

$$\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle \approx tcl. \quad (2.44)$$

Le photon se trouve donc à une distance moyenne du centre :

$$\bar{R}(t) = \sqrt{\langle \mathbf{R}^2(t) \rangle} \approx \sqrt{tcl}, \quad (2.45)$$

et atteint la surface en un temps caractéristique de diffusion :

$$t_{\text{diff}} = \frac{R^2}{c\ell}, \quad (2.46)$$

où R est le rayon de l'étoile. Pour le Soleil, $R_{\odot} = 696\,340$ km, et en prenant $\ell \approx 1$ mm, $t_{\text{diff}} \approx 50\,000$ ans. Le transfert radiatif au sein d'une étoile est donc particulièrement lent.

2.3.3 Convection

Lorsque le milieu se fait plus opaque ou plus froid, le gradient de température radiatif augmente, ce qui finit par déstabiliser l'équilibre hydrostatique de la matière qui s'anime de mouvements de convection : les gaz chauds remontent vers la surface où ils se refroidissent par détente et rayonnement avant de replonger vers les profondeurs. Le transfert de chaleur est alors essentiellement assuré par ces « cellules » de convection. La description détaillée de telles cellules relève en principe d'une approche hydrodynamique. Nous allons ici établir un modèle minimal pour le régime convectif basé sur des considérations thermodynamiques. Pour commencer, nous allons rappeler les conditions de détente adiabatique d'un gaz.

Détente adiabatique d'un gaz

Dans un gaz parfait classique, l'énergie interne E est proportionnelle à NT (en vertu du théorème d'équipartition de l'énergie⁸), de même que l'enthalpie $H = E + PV$ (car $PV = NkT$). Nous pouvons donc introduire les capacités thermiques isochore c_v et isobare c_p par particule de gaz telles que :

$$E = Nc_v T \quad (2.47a)$$

$$H = Nc_p T. \quad (2.47b)$$

Ainsi, lors d'une transformation adiabatique où seules les forces de pression fournissent un travail $dW = -PdV$,

$$dE = Nc_v dT = dW = -PdV \quad (2.48a)$$

$$dH = Nc_p dT = dE + PdV + VdP = VdP. \quad (2.48b)$$

8. Ce n'est plus strictement vrai cependant si les degrés de liberté internes sont fortement anharmoniques, et/ou si les énergies de quantification associées sont comparables à kT .

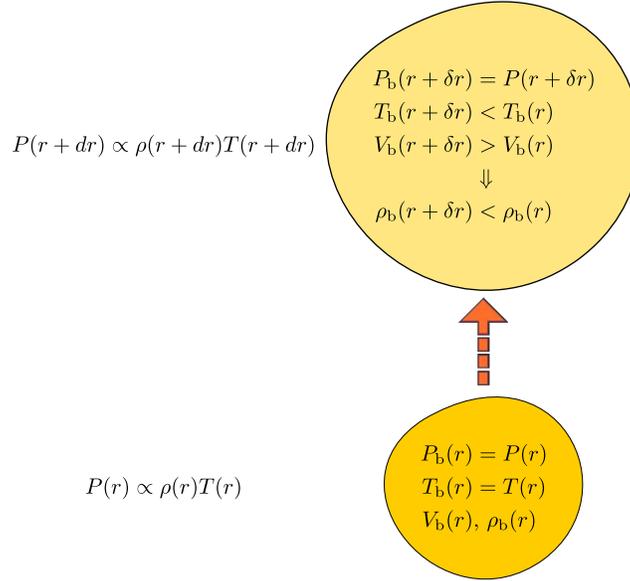


FIGURE 2.3 – Instabilité convective : une bulle de gaz, initialement en équilibre hydrostatique et thermique avec son milieu, est déstabilisée par une impulsion vers le haut. Elle monte en se détendant adiabatiquement tout en restant en équilibre avec la pression $P(r)$ du milieu. Continue-t-elle à monter ou retourne-t-elle à sa position d'origine ? La réponse à cette question dépend du gradient de température dans le milieu.

On conclut du ratio de ces deux quantités que :

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = d \log(PV^\gamma) = 0, \quad (2.49)$$

où $\gamma = c_p/c_v$ est le coefficient adiabatique du gaz. En introduisant la relation $PV = NkT$, il vient indifféremment :

$$d(PV^\gamma) = d(TV^{\gamma-1}) = d(T^\gamma P^{1-\gamma}) = 0. \quad (2.50)$$

Dans un gaz parfait « monoatomique » (sans degrés de liberté internes⁹), $c_v = \frac{3}{2}k$ par particule, tandis que $c_p = c_v + k = \frac{5}{2}k$ par particule, si bien que $\gamma = 5/3$. On retrouve là la loi de Laplace (1.38).

Instabilité convective : critère de Schwarzschild

La convection se manifeste par la rupture de l'équilibre hydrostatique et la mise en mouvement de grandes quantités de gaz qui font circuler la matière et transfèrent l'énergie dans l'étoile. Imaginons une « bulle » de gaz à la position radiale r , contenant N_b particules dans un volume V_b , initialement en équilibre hydrostatique et thermique avec son milieu, mais déstabilisée par une « poussée vers le haut » d'origine quelconque (Fig. 2.3). A quelle

9. Pour exemple, un gaz parfait diatomique tel que O_2 possède 5 degrés de liberté harmoniques par molécule (voir chapitre 1), et a donc une énergie interne $\varepsilon = \frac{5}{2}kT$ par particule alors que sa pression reste $P = nkT$; par conséquent $c_v = \frac{5}{2}k$ par particule, $c_p = c_v + k = \frac{7}{2}k$ par particule, et $\gamma = 7/5$.

condition cette bulle de gaz peut-elle continuer à s'élever, portée par le gradient de pression dans le milieu¹⁰, initiant ainsi le mouvement de convection ?

Supposons dans un premier temps que la bulle reste en équilibre avec la pression $P(r)$ du milieu et se détende de façon adiabatique en remontant le gradient de pression (donc sans échanger de chaleur avec son environnement). On a alors dans la bulle qui s'est élevée de δr :

$$d(PV_b^\gamma) = 0 \Rightarrow P(r)V_b(r)^\gamma = P(r+\delta r)V_b(r+\delta r)^\gamma \Rightarrow \frac{P(r+\delta r)}{P(r)} = \left(\frac{\rho_b(r+\delta r)}{\rho_b(r)} \right)^\gamma, \quad (2.51)$$

où $\rho_b(r)$ est la densité de masse dans la bulle (avec, à l'origine de la détente $\rho_b(r) = \rho(r)$), la densité de masse dans le milieu). Soit :

$$\rho_b(r+\delta r) = \rho(r) \left(1 + \frac{1}{P(r)} \frac{d}{dr} P(r) \delta r \right)^{\frac{1}{\gamma}} \approx \rho(r) \left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P(r)} \frac{d}{dr} P(r) \delta r \right). \quad (2.52)$$

La bulle continue à s'élever naturellement (portée par la poussée d'Archimède, cf. chapitre 1) si sa densité $\rho_b(r+\delta r)$ est inférieure à la densité $\rho(r+\delta r)$ du milieu :

$$\begin{aligned} \rho_b(r+\delta r) < \rho(r+\delta r) &\Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P(r)} \frac{d}{dr} P(r) < \frac{1}{\rho(r)} \frac{d}{dr} \rho(r) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dr} \log P(r) < \frac{d}{dr} \log \rho(r). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Comme $P(r) = \rho(r)\mathcal{R}T(r)/\mu$ dans le milieu, cette condition s'écrit équivalamment :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dr} \log P(r) &< \frac{d}{dr} \log P(r) - \frac{d}{dr} \log T(r) \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \log T(r) &< \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{d}{dr} \log P(r) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dr} T(r) < T'_c(r). \end{aligned} \quad (2.54)$$

où $T'_c(r)$ est le « gradient thermique adiabatique » :

$$T'_c(r) = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{d}{dr} P(r). \quad (2.55)$$

Puisque la pression et la température décroissent normalement avec r , la convection démarre lorsque la valeur absolue du gradient de température devient trop grande au regard de celle du gradient de pression. En introduisant à nouveau la relation $P(r) = \rho(r)\mathcal{R}T(r)/\mu$ et la condition d'équilibre hydrostatique (1.118) dans (2.55), il vient :

$$T'_c(r) = -\frac{\mu}{\mathcal{R}} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) g(r). \quad (2.56)$$

On obtient finalement le critère de convection de Schwarzschild en écrivant $1 - 1/\gamma = (c_p - c_v)/c_p = k/c_p$ et en introduisant la capacité calorifique isobare par unité de masse $C_p = N_A c_p / \mu$:

10. On néglige ici la pression de radiation.

$$\text{La convection démarre dès que } \frac{d}{dr}T(r) < T'_c(r) = -\frac{g(r)}{C_p}. \quad (2.57)$$

Nous pouvons également établir la variation de la température $T_b(r)$ de la bulle lors de sa détente adiabatique. Comme $d(T_b^\gamma P^{1-\gamma}) = 0$,

$$\frac{d}{dr}T_b(r) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T_b(r)}{P(r)} \frac{d}{dr}P(r) = \frac{T_b(r)}{T(r)} T'_c(r). \quad (2.58)$$

Puisque $T'_c(r) < 0$, le gaz se refroidit (comme attendu) en se détendant. On a notamment à l'origine de la détente :

$$\frac{d}{dr}T_b(r) = T'_c(r). \quad (2.59)$$

La bulle se refroidit donc initialement moins vite que le milieu dès que la limite de Schwarzschild est enfoncée (c'est pourquoi elle devient moins dense que ce milieu). La bulle peut alors accélérer très vite !

Equation de transfert en régime convectif

Bien entendu, les gaz ne se détendent pas de façon strictement adiabatique dans la zone de convection – en particulier parce que la température de la « bulle » ci-dessus diffère rapidement de celle de son environnement. Elle va donc échanger de la chaleur avec celui-ci, être elle-même déstabilisée et brassée (turbulence), ... ce qui va avoir tendance à réhomogénéiser le milieu. En fait, le raisonnement ci-dessus suggère qu'en régime convectif établi (stable), le profil de température ne peut s'écarter significativement du gradient thermique adiabatique :

$$\frac{d}{dr}T(r) \approx T'_c(r) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{d}{dr}P(r) = -\frac{g(r)}{C_p}. \quad (2.60)$$

On supposera également que les écarts à l'équilibre hydrostatique dans la zone de convection ne sont pas suffisants pour remettre en cause les équations (2.5).

Discussion

L'épaisseur de la zone convective de surface varie d'une étoile à l'autre ; elle est d'environ $0.25R_\odot$ pour le Soleil mais ne représente que $\approx 2\%$ de sa masse (alors que la zone radiative comprend les 98% restants, coeur compris). L'épaisseur relative de cette zone convective tend à augmenter lorsque la masse de l'étoile diminue. Les étoiles les plus petites et « froides » sont ainsi entièrement convectives. A l'inverse, le coeur peut également devenir convectif et s'entourer d'une zone radiative dans les étoiles les plus lourdes de la séquence principale où domine le cycle CNO (car le débit d'énergie par unité d'angle solide $\mathcal{L}(r)/(4\pi r^2)$ y devient très grand, voir ci-dessous).

2.3.4 Modèles pour la puissance massique

Le calcul de la section efficace des réactions nucléaires permet d'établir l'approximation suivante pour la puissance par unité de masse libérée par les chaînes proton-proton [11] :

$$\varepsilon_n = 0.238\rho X^2 f_{PP}\psi_{PP}C_{PP}T_6^{-2/3} \exp\left(-33.8T_6^{-1/3}\right) \text{ W/kg} \quad (2.61)$$

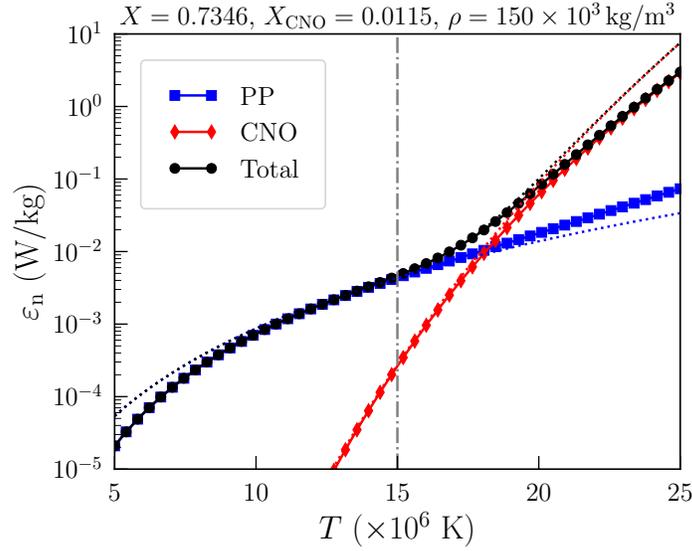


FIGURE 2.4 – Comparaison entre les puissances massique des chaînes proton-proton (PP) et du cycle CNO d’après les équations (2.61)/(2.63) (traits pleins et symboles) et leurs approximations (2.65) par une loi de puissance (lignes pointillées). Les paramètres des modèles sont $X = 0.7346$, $X_{\text{CNO}} = 0.0115$ et $\rho = 150 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (densité au coeur du Soleil). La ligne verticale indique la température $T = 15 \times 10^6 \text{ K}$ au coeur du Soleil.

avec $T_6 = T/(10^6 \text{ K})$, ρ en kg/m^3 , et :

$$\begin{aligned}
 f_{\text{PP}} &= 1 + 4.206 \times 10^{-3} X^2 \sqrt{(3+X)\rho} T_6^{-3/2} \\
 \psi_{\text{PP}} &= 1 + 1.412 \times 10^8 \left(\frac{1}{X} - 1 \right) \exp\left(-49.98 T_6^{-1/3}\right) \\
 C_{\text{PP}} &= 1 + 0.0123 T_6^{1/3} + 0.0109 T_6^{2/3} + 0.000938 T_6.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

On obtient de même pour le cycle CNO :

$$\varepsilon_{\text{n}} = 8.67 \times 10^{20} \rho X X_{\text{CNO}} C_{\text{CNO}} T_6^{-2/3} \exp\left(-152.28 T_6^{-1/3}\right) \text{ W/kg} \tag{2.63}$$

avec

$$C_{\text{CNO}} = 1 + 0.0027 T_6^{1/3} - 0.00778 T_6^{2/3} - 0.000149 T_6 \tag{2.64}$$

et X_{CNO} la fraction massique de carbone, azote et oxygène dans le coeur de l’étoile ($\approx 1.15\%$ dans le Soleil).

On pourra alternativement utiliser les lois de puissance suivantes (plus simples mais moins précises) :

$$\varepsilon_{\text{n}} = \varepsilon_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^p \left(\frac{T}{T_0} \right)^q, \tag{2.65}$$

Processus	ε_0 (W/kg)	T_0 (K)	p	q	Refs.
Chaîne proton-proton	$(1.07 \times 10^{-8})X^2$	10^7	1	4	[12]
	$(9.5 \times 10^{-9})X^2$	10^7	1	4	[13, 14]
Cycle CNO	$(6.54 \times 10^{-11})XX_{\text{CNO}}$	10^7	1	20	[12]
Réaction triple α	$(?)Y^3$	10^8	2	40	[?]

TABLE 2.1 – Paramètres de la puissance massique (2.65) produite par différents processus de fusion.

où $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ et les valeurs de ε_0 , T_0 , p et q sont reportées dans la table 2.1 pour différents processus de fusion (chaîne proton-proton, cycle CNO et réaction triple α). Ces approximations sont comparées à (2.61) et (2.63) sur la figure 2.4 (voir le code `PPCNO.py`). La densité de puissance $\rho\varepsilon_n$ est, logiquement, $\propto \rho^2$ pour les processus impliquant deux noyaux à la fois (fusion de l'hydrogène) et $\propto \rho^3$ pour la réaction triple α impliquant « quasi-simultanément » trois particules (avec les fractions massiques correspondantes). En outre, le rendement des réactions CNO et triple α est extrêmement dépendant de la température, avec des exposants q atteignant respectivement ≈ 20 et ≈ 40 . La fusion reste cependant régulée au coeur de l'étoile tant que la matière n'est pas dégénérée : si les réactions nucléaires accélèrent, les gaz chauffent, la pression $P \propto \rho kT$ augmente, si bien que coeur se détend et se refroidit, ce qui tempère *in fine* la réactivité. A l'inverse, si les réactions nucléaires ralentissent, la pesanteur contracte le coeur qui s'échauffe, ce qui relance la fusion. Ce mécanisme de contre-réaction n'existe pas dans un gaz dégénéré où la pression est indépendante de la température : les réactions nucléaires peuvent s'emballer et brûler des quantités impressionnantes de combustible pour lever la dégénérescence (« flash de l'hélium » dans les étoiles évoluées), voir détruire l'astre (supernovas de type I dans les naines blanches, voir chapitre 3).

2.4 Synthèse et solution des équations

La température $T(r)$ et la densité de masse $\rho(r)$ au sein de l'étoile vérifient donc (en première approximation) le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d}{dr}P(r) = \frac{d}{dr}[P_m(r) + P_r(r)] = -\rho(r)g(r) \text{ (équilibre hydrostatique)}, \quad (2.66a)$$

où :

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \text{ (accélération dans le champ de pesanteur de l'étoile)}, \quad (2.66b)$$

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \text{ (masse enclose dans la sphère de rayon } r), \quad (2.66c)$$

$$P_m(r) = \frac{\rho(r)}{\mu} \mathcal{R}T(r) \text{ (pression des gaz)}, \quad (2.66d)$$

$$P_r(r) = \frac{1}{3}aT(r)^4 = \frac{4\sigma}{3c}T(r)^4 \text{ (pression radiative)}. \quad (2.66e)$$

En outre,

$$\frac{d}{dr}T(r) = \max(T_r'(r), T_c'(r)) , \quad (2.66f)$$

où :

$$T_r'(r) = -\frac{3}{16\sigma} \frac{\rho(r)\kappa(r)}{T(r)^3} \frac{\mathcal{L}(r)}{4\pi r^2} \quad (\text{gradient de transfert radiatif}), \quad (2.66g)$$

$$T_c'(r) = -\frac{g(r)}{C_p} \quad (\text{gradient thermique adiabatique en régime convectif}), \quad (2.66h)$$

avec $\mathcal{L}(r)$ le débit d'énergie dans l'étoile :

$$\mathcal{L}(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \varepsilon_n(r'), \quad (2.66i)$$

et $\varepsilon_n(r)$ la puissance massique produite par les réactions thermonucléaires.

On utilise pour l'opacité $\kappa(r)$ les lois de Kramers (2.37)–(2.39) ou les tables OPAL [10], et pour la puissance massique $\varepsilon_n(r)$ les équations (2.61) et (2.63) ou leurs approximations (2.65) avec les paramètres de la table 2.1.

Pour résoudre ce système, il faut appliquer des conditions aux limites appropriées. A cet effet, on suppose l'existence d'une surface hydrostatique caractérisée par une pression de référence $P(R) = P_s$, et on impose :

- $\mathcal{M}(R) = M$, la masse totale de l'étoile.
- $T(R) = T_c = L/(4\pi\sigma R^2)$, où $L = \mathcal{L}(R)$ est la luminosité de l'étoile (Loi de Stefan-Boltzmann).

On pourra alternativement caractériser la surface de l'étoile par une densité de référence $\rho(R) = \rho_s$ et imposer par conséquent :

$$P_s = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_s T_c + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4. \quad (2.67)$$

En pratique, la « surface visible » du soleil, appelée photosphère, est définie par des considérations optiques. Elle correspond à la zone où les gaz deviennent « optiquement fins¹¹ » (transparents) et s'étend sur quelques centaines de kilomètres [15]. La densité moyenne dans la photosphère du Soleil, $\rho_s = 3 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$, est 4000 fois inférieure à la densité de l'air au niveau de la mer sur Terre. Par delà la photosphère s'étendent la chromosphère puis la couronne solaire. L'atmosphère (photosphère/chromosphère/couronne) des étoiles est un milieu très dilué et complexe¹², structuré par les champs magnétiques, dont la description va bien au delà de l'approximation hydrostatique.

2.4.1 Résolution numérique

Il existe différentes façons de résoudre ce système d'équations différentielles (méthodes de type Newton-Raphson, ...). La plus simple consiste à trouver itérativement son point fixe

11. Plus précisément, on peut définir la surface de base $r = r_p$ de la photosphère comme le lieu où la profondeur optique $\log[I(r_0)/I(r_p)]$ vaut 1, avec $I(r)$ l'intensité énergétique d'un faisceau de longueur d'onde $\lambda \simeq 500 \text{ nm}$ émis depuis $r = r_0 \gg r_p$, et ayant traversé l'atmosphère du Soleil sous incidence normale.

12. La température n'y décroît pas de façon monotone, la couronne solaire pouvant atteindre 2 000 000 K.

« auto-cohérent » en utilisant une méthodes de différences finies pour intégrer les équations (voir le code `star.py`).

Il convient tout d'abord de remarquer que la pression et la température (donc toutes les quantités thermodynamiques) sont des *fonctionnelles* de la densité de masse $\rho(r)$. On peut en effet calculer la pression $P[\rho](r)$ à partir des équations pour $\mathcal{M}(r)$, $g(r)$ et dP/dr . On obtient ensuite $T[\rho](r)$ en inversant l'équation d'état $P(r) = P_m(r) + P_r(r) \equiv P(\rho(r), T(r))$ du gaz parfait.

On introduit la variable $x = r/R \in [0, 1]$ et un maillage x_i ($0 \leq i \leq N$) de cet intervalle avec $x_0 = 0$ et $x_N = 1$. On fait l'approximation suivante pour les intégrales sur ce maillage :

$$\int_0^{x_i R} dr 4\pi r^2 f(r) = R^3 \left[\sum_{j=0}^{i-1} f_j (\omega_j^< + \omega_j^>) + f_i \omega_i^< \right], \quad (2.68)$$

où $f_i = f(x_i R)$ et

$$\omega_0^< = 0, \omega_{i \neq 0}^< = \frac{4\pi}{3} \left[x_i^3 - \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right)^3 \right] \quad (2.69a)$$

$$\omega_{i \neq N}^> = \frac{4\pi}{3} \left[\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right)^3 - x_i^3 \right], \omega_N^> = 0 \quad (2.69b)$$

sont les volumes normalisés des coquilles $x \in [\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), x_i]$ et $x \in [x_i, \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)]$ situées de part et d'autre de $x = x_i$. On substitue par ailleurs aux équations différentielles des différences finies :

$$\frac{d}{dr} F(r) = f(r) \Rightarrow F_{i+1} - F_i = \frac{R}{2} (x_{i+1} - x_i) (f_i + f_{i+1}), \quad (2.70)$$

avec une condition aux limites appropriée pour F_0 ou F_N .

Partant d'une solution approchée $\rho_i^{(n)}$ pour la densité de masse sur le maillage, on calcule $\mathcal{M}_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$ puis $P_i^{(n)}$ à partir de (2.66a), (2.66c) et (2.66b). On en déduit alors la température $T_i^{(n)}$ en inversant les équations d'état (2.66d) et (2.66e), et le débit d'énergie $\mathcal{L}_i^{(n)}$ à partir de (2.66i). On injecte ensuite ces quantités dans l'équation (2.66f) pour dT/dr que l'on intègre pour obtenir un nouveau profil de température $T_i^{(n+1)}$ et un nouveau profil de densité de masse

$$\rho_i^{(n+1)} = \frac{\mu}{\mathcal{R}} \left[\frac{P_i^{(n)}}{T_i^{(n+1)}} - \frac{4\sigma}{3c} (T_i^{(n+1)})^3 \right] \quad (2.71)$$

à partir, une fois encore, des équations d'état (2.66d) et (2.66e). On ajuste enfin le rayon R de l'étoile de sorte que

$$\int_0^R dr 4\pi r^2 \rho(r) = M = R^3 \sum_{i=0}^N \rho_i^{(n+1)} (\omega_i^< + \omega_i^>), \quad (2.72)$$

et on itère jusqu'à convergence de la densité de masse :

$$\left| \rho^{(n+1)} - \rho^{(n)} \right| = \sqrt{\sum_i \left(\rho_i^{(n+1)} - \rho_i^{(n)} \right)^2} < \varepsilon. \quad (2.73)$$

Ce processus itératif converge en principe vers un point fixe solution des équations (2.66). Toutefois, les oscillations de $\rho^{(n)}$ d'une itération à l'autre peuvent entraver la convergence si elles ne sont pas amorties. C'est pourquoi il est judicieux de tempérer les variations de la densité de masse en « mélangeant » les solutions $\rho^{(n)}$ et $\rho^{(n+1)}$ avant d'itérer :

$$\rho_i^{(n+1)} \leftarrow \alpha \rho_i^{(n+1)} + (1 - \alpha) \rho_i^{(n)}, \quad (2.74)$$

où $\alpha \sim 0.2$ assure en pratique la convergence pour toute masse $M \in [0.1M_\odot, 50M_\odot]$.

On peut partir de la solution homogène $\rho_i^{(0)} = 3M/(4\pi R^3)$ avec $R = R_\odot \sqrt{M/M_\odot}$ (voir paragraphes 2.2.3 et 2.5.3). On applique à chaque itération les conditions aux limites :

$$P_N^{(n)} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_s T_N^{(n)} + \frac{4\sigma}{3c} \left(T_N^{(n)} \right)^4 \quad (2.75)$$

$$T_N^{(n+1)} = \left(\frac{\mathcal{L}_N^{(n)}}{4\pi\sigma R^2} \right)^{1/4}. \quad (2.76)$$

On obtient ainsi les profils de densité de masse, température, pression, et débit d'énergie pour une masse M donnée.

2.4.2 Exemples

On peut résoudre à l'aide du code `star.py` le système d'équations (2.66) pour le Soleil avec les paramètres suivants [2, 6] :

- Masse $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg.
- Composition homogène $X_\odot = 0.7346$, $Y_\odot = 0.2485$, $Z_\odot = 0.0169$, et $X_{\text{CNO}} = 0.0115$.
- Tables OPAL pour l'opacité $\kappa(\rho, T)$ [10].
- Capacité calorifique isobare par particule $c_p = 5k/2$.
- Densité de surface $\rho_s = 3 \times 10^{-4}$ kg/m³.

Les profils de densité de masse, pression, température, densité d'énergie produite par les réactions nucléaires, et libre parcours moyen des photons ainsi obtenus sont représentés sur la figure 2.6. Les grandeurs caractéristiques du Soleil (rayon, luminosité...) calculées avec ce modèle « homogène » sont reportées dans la table 2.2 et comparées aux mesures ou estimations astronomiques. La solution obtenue est peu satisfaisante à bien des égards :

- L'étoile est beaucoup trop grande ($R = 930\,006$ km au lieu de $R_\odot = 696\,340$ km).
- Sa luminosité est bien trop faible ($L = 2.4 \times 10^{26}$ W au lieu de $L_\odot = 3.83 \times 10^{26}$ W).
- La densité de masse, la pression et la température centrale sont largement sous-estimées.
- Le libre parcours moyen des photons atteint le mètre avant que ne démarre la convection ; la zone de convection à la surface de l'étoile est trop fine.

Ces carences résultent des hypothèses effectuées ainsi que des limites intrinsèques du modèle. Tout d'abord, la composition du Soleil est loin d'être homogène. Il brille en effet depuis 4.5 milliards d'années, aussi son coeur s'est-il déjà considérablement enrichi en hélium : on

estime en effet que $X \approx 0.36$ et $Y \approx 0.62$ au centre du Soleil. On obtient de bien meilleurs résultats pour la densité de masse, la pression et la température centrales avec le profil de composition (empirique) suivant, représenté sur la figure 2.5 :

$$X(r) = X_{\odot} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{r}{0.125R}\right)^2} \right). \quad (2.77)$$

En outre, l'épaisseur de la zone de convection, donc la taille de l'étoile dépendent énormément de la condition aux limites choisie pour $P(R)$ ou $\rho(R)$. En effet, la loi de Laplace (2.50) s'applique dans toute la zone de convection étant données les approximations effectuées :

$$T(r)^{\gamma} P(r)^{1-\gamma} = \text{Constante} = T(R)^{\gamma} P(R)^{1-\gamma}. \quad (2.78)$$

où $\gamma = 5/3$ est le coefficient adiabatique du gaz¹³. Par conséquent, le choix de $P(R)$ (et de γ !) contraint fortement le profil de pression et de température dans la zone de convection. En l'absence d'un modèle d'atmosphère stellaire permettant de calculer un P_s ou ρ_s effectif pour la surface hydrostatique, il est donc difficile de trouver une solution pertinente des équations (2.66) si seule la masse M de l'étoile est connue. Il convient de se donner un deuxième paramètre, telle que le rayon, la luminosité ou la température de surface par exemple afin de fixer P_s ou ρ_s en conséquence. Dans le cas présent, on obtient un bon accord avec les données astronomiques en choisissant :

$$\rho_s = 2.5 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3. \quad (2.79)$$

Cette valeur est certes bien supérieure à la densité de masse moyenne dans la photosphère solaire, mais il faut garder à l'esprit que les hypothèses faites dans la zone de convection et à la surface de l'étoile sont assez grossières. La densité de masse calculée varie, en particulier, d'un ordre de grandeur tous les ≈ 2500 km au voisinage de cette surface. Les profils de densité de masse, pression, température, densité d'énergie produite et libre parcours moyen des photons obtenus avec ce modèle « inhomogène » sont représentés sur la figure 2.7 et les grandeurs caractéristiques correspondantes reportées dans la table 2.2. L'accord avec les données astronomiques est très satisfaisant mais les choix (2.77) et (2.79) restent empiriques. Comme attendu d'une étoile de cette masse, la pression de radiation est négligeable et la fusion nucléaire est largement dominée par les chaînes proton-proton. Le rayon et la masse du coeur, défini comme la région qui produit 99% de la luminosité, atteignent respectivement $\approx 0.25R_{\odot}$ et $0.5M_{\odot}$. L'essentiel de la masse du Soleil est donc contenue dans son noyau. Le libre parcours moyen des photons dans la zone radiative ne dépasse pas quelques millimètres et la température atteint encore $T \approx 2 \times 10^6$ K à l'entrée de la zone de convection (appelée tachocline).

Les profils obtenus pour une étoile de masse $M = 10M_{\odot}$ [avec les mêmes hypothèses de composition (2.77) et de densité de surface (2.79)] sont représentés à titre indicatif sur la figure 2.8 (car il faudrait vraisemblablement ajuster aussi bien le profil de composition que ρ_s ou P_s). La profondeur relative de la zone de convection en surface a diminué, mais le coeur lui-même est devenu convectif¹⁴ et les réactions de fusion sont maintenant dominées par le cycle CNO. Le rayon de l'étoile atteint $R = 2241\,068$ km et sa luminosité $L = 1.94 \times 10^{30}$ W

13. On a également $P(r)\rho(r)^{-\gamma} = \text{Constante}$: La zone de convection est un polytrophe d'indice $\gamma = 5/3$.

14. Sa composition devrait donc être plus homogène.

	Modèle homogène	Modèle inhomogène	Mesure/ Estimation
Rayon R_{\odot} (km)	930 006	691 366	696 340
Densité moyenne $\bar{\rho}$ (g/cm ³)	0.59	1.44	1.41
Densité centrale $\rho(0)$ (g/cm ³)	81.62	151.40	≈ 150
Champ de pesanteur en surface $g(R)$ (m/s ²)	153.6	277.9	274
Température de surface $T_c \equiv T(R)$ (K)	4444	5698	5775
Température centrale $T(0)$ (10 ⁶ K)	13.0	15.6	≈ 15.1
Pression centrale $P(0)$ (10 ⁹ atm)	145.0	233.9	≈ 225
Luminosité L_{\odot} (10 ²⁶ W)	2.40	3.59	3.83
dont cycle CNO (%)	0.10	2.09	$\lesssim 2$
Épaisseur de la zone de convection (R_{\odot})	0.065	0.283	≈ 0.25
Masse de la zone de convection (M_{\odot})	≈ 0	0.026	≈ 0.02
Rayon du coeur @0.99 L_{\odot} (R_{\odot})	0.206	0.263	≈ 0.25
Masse du coeur @0.99 L_{\odot} (M_{\odot})	0.524	0.509	≈ 0.50

TABLE 2.2 – Grandeurs caractéristiques du Soleil calculées avec les modèles « homogène » et « inhomogène », et valeurs mesurées/estimées [2, 6].

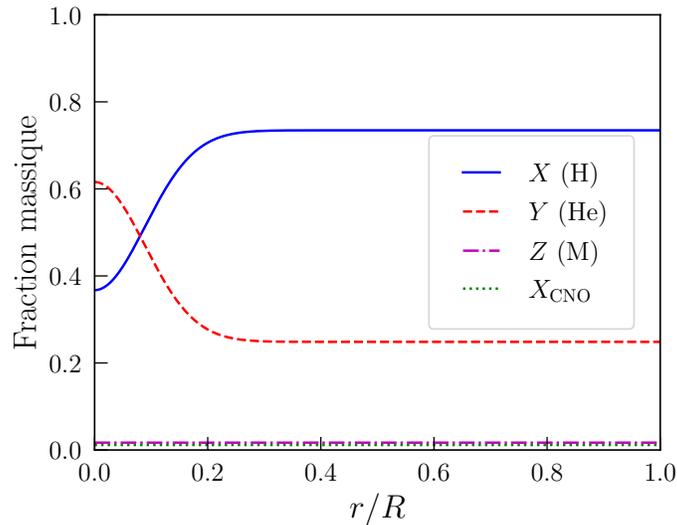


FIGURE 2.5 – Fractions massique d’hydrogène (X), d’hélium (Y), métallicité Z et fraction massique de C/N/O X_{CNO} en fonction de la position radiale $x = r/R$ pour le « modèle inhomogène ».

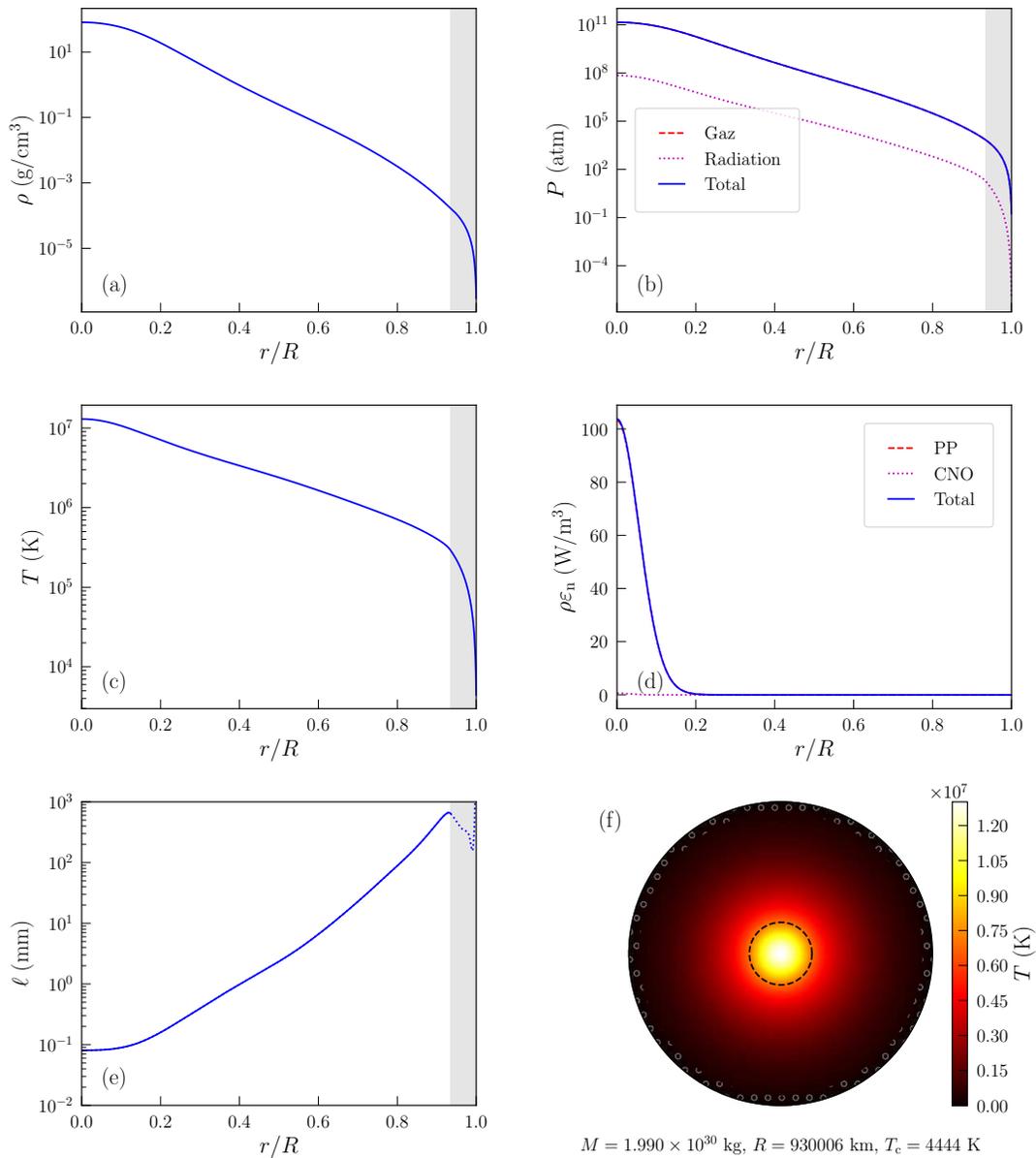


FIGURE 2.6 – (a) Densité de masse, (b) pression, (c) température, (d) densité d'énergie produite par les réactions nucléaires, et (e) libre parcours moyen des photons calculés dans le Soleil en fonction de la position radiale $x = r/R$ pour le « modèle homogène » ($X = 0.7346$, $Z = 0.0169$, $\rho_s = 3 \times 10^{-4}$ kg/m³). La zone de convection est délimitée en gris. (f) Coupe de la température calculée dans le Soleil. La zone de convection est représentée par les bulles. Le cercle pointillé noir délimite la région dans laquelle 99% de la luminosité est produite. Dans ce modèle, le rayon du soleil est $R_\odot = 930\,006$ km, sa luminosité est $L_\odot = 2.40 \times 10^{26}$ W, et sa température de surface est $T_c = 4444$ K.

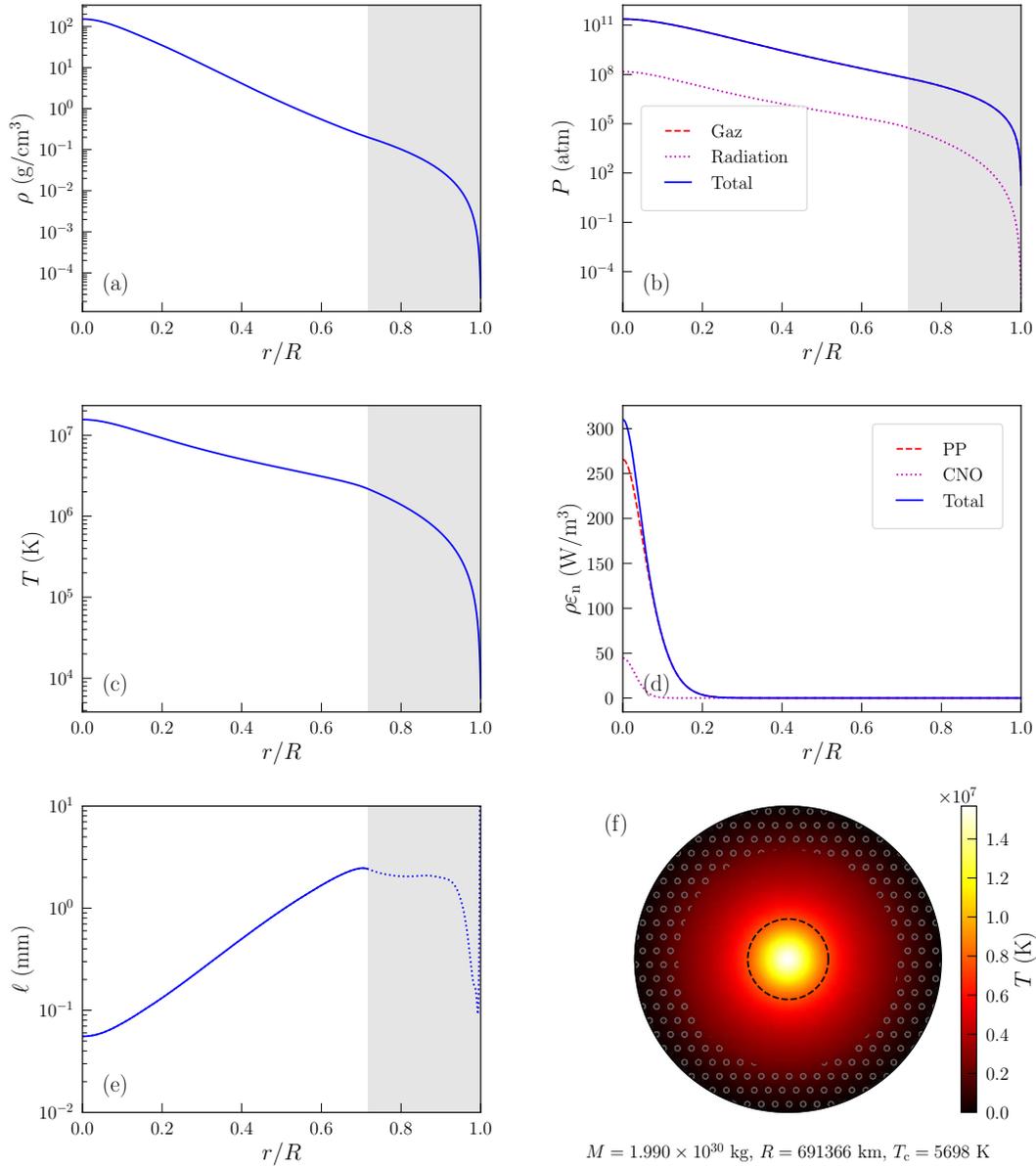


FIGURE 2.7 – (a) Densité de masse, (b) pression, (c) température, (d) densité d'énergie produite par les réactions nucléaires, et (e) libre parcours moyen des photons calculés dans le Soleil en fonction de la position radiale $x = r/R$ pour le « modèle inhomogène » [Eq. (2.77) pour $X(r)$, $Z = 0.0169$, $\rho_s = 2.5 \times 10^{-2}$ kg/m^3]. La zone de convection est délimitée en gris. (f) Coupe de la température calculée dans le Soleil. La zone de convection est représentée par les bulles. Le cercle pointillé noir délimite la région dans laquelle 99% de la luminosité est produite. Dans ce modèle, le rayon du soleil est $R_\odot = 691\,366$ km, sa luminosité est $L_\odot = 3.59 \times 10^{26}$ W, et sa température de surface est $T_c = 5698$ K.

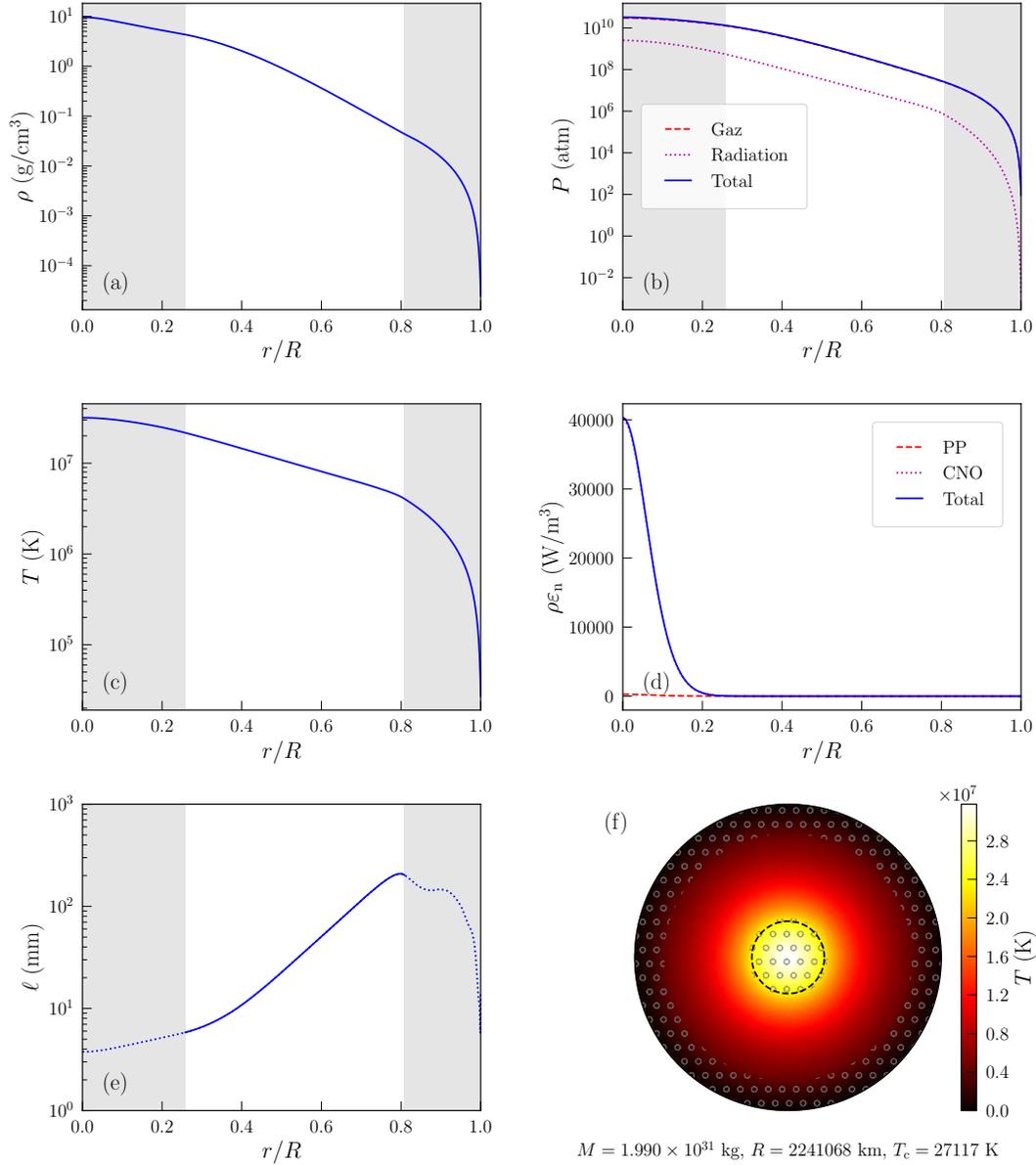


FIGURE 2.8 – (a) Densité de masse, (b) pression, (c) température, (d) densité d'énergie produite par les réactions nucléaires, et (e) libre parcours moyen des photons calculés dans une étoile de masse $M = 10M_{\odot}$ en fonction de la position radiale $x = r/R$ pour le « modèle inhomogène » [Eq. (2.77) pour $X(r)$, $Z = 0.0169$, $\rho_s = 2.5 \times 10^{-2} \text{ kg}/\text{m}^3$]. Les zones de convection sont délimitées en gris. (f) Coupe de la température calculée dans cette étoile. Les zones de convection sont représentées par les bulles. Le cercle pointillé noir délimite la région dans laquelle 99% de la luminosité est produite. Dans ce modèle, le rayon de l'étoile est $R = 2241068$ km, sa luminosité est $L_{\odot} = 1.94 \times 10^{30}$ W, et sa température de surface est $T_c = 27117$ K.

est presque 5000 fois supérieure à celle du Soleil. Sa surface est également beaucoup plus chaude ($T_c = 27\,117\text{ K}$). La température centrale atteint $T(0) = 31.7 \times 10^6\text{ K}$; la pression centrale $P(0) = 32.6 \times 10^9\text{ atm}$ et la densité centrale $\rho(0) = 9.6\text{ g/cm}^3$ sont cependant plus faibles que dans le Soleil.

Le modèle est beaucoup moins réaliste pour des étoiles de faible masse $M < 0.5M_\odot$ qui ne sont pas assez convectives et trop froides. Ces carences peuvent résulter, d'une part, de l'approximation (2.61) pour la densité massique d'énergie produite par les réactions nucléaires, moins précise pour $T < 10^7\text{ K}$, et, d'autre part, de la description simpliste de la zone de convection qui domine le transfert d'énergie dans ces étoiles (et qui nécessiterait une approche hydrodynamique plus rigoureuse).

2.5 Discussion

Les équations (2.66) permettent d'établir quelques relations générales sur la structure et la luminosité des étoiles.

2.5.1 La luminosité limite d'Eddington

Les équations (2.66) imposent une limite à la pression radiative (donc à la luminosité) que peut supporter une étoile. En effet, puisque $P_r(r) = 4\sigma T(r)^4/(3c)$,

$$\frac{d}{dr}P_r(r) = \frac{16\sigma}{3c}T(r)^3 \frac{d}{dr}T(r). \quad (2.80)$$

Dans la zone radiative, on a ainsi :

$$\frac{d}{dr}P_r(r) = -\frac{1}{c}\rho(r)\kappa(r)\frac{\mathcal{L}(r)}{4\pi r^2}. \quad (2.81)$$

En outre,

$$\frac{d}{dr}P(r) = \frac{d}{dr}P_m(r) + \frac{d}{dr}P_r(r) = -\rho(r)g(r), \quad (2.82)$$

et :

$$\frac{d}{dr}P_m(r) = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \left(\rho(r)\frac{d}{dr}T(r) + T(r)\frac{d}{dr}\rho(r) \right). \quad (2.83)$$

D'après (2.80) et (2.81), $dP_r(r)/dr < 0$ donc $dT(r)/dr < 0$; par conséquent $dP_m(r)/dr < 0$ sinon $d\rho(r)/dr > 0$: l'étoile, instable, expulse son enveloppe. Toutes les dérivées de (2.82) sont ainsi négatives, de sorte que :

$$\frac{d}{dr}P_r(r) / \frac{d}{dr}P(r) = \frac{1}{c} \frac{\kappa(r)}{g(r)} \frac{\mathcal{L}(r)}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi cG} \kappa(r) \frac{\mathcal{L}(r)}{\mathcal{M}(r)} < 1. \quad (2.84)$$

On doit donc partout avoir dans la zone radiative :

$$\mathcal{L}(r) < \frac{4\pi cGM(r)}{\kappa(r)}. \quad (2.85)$$

On obtient une borne supérieure pour la luminosité L de l'étoile en remplaçant $\mathcal{M}(r)$ par la masse totale M de l'étoile et $\kappa(r)$ par sa valeur minimale $\kappa_m \approx 0.04\text{ m}^2/\text{kg}$ dans un plasma d'hydrogène pur soumis à la seule diffusion Compton (2.39) par les électrons :

$$L < L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi cGM}{\kappa_{\text{m}}}. \quad (2.86)$$

C'est la « limite d'Eddington » à la luminosité d'une étoile de masse M :

$$L_{\text{Edd}} \approx (1.26 \times 10^{31} \text{ W}) \frac{M}{M_{\odot}}, \quad (2.87)$$

ou équivalamment :

$$\frac{L_{\text{Edd}}}{L_{\odot}} \approx 3.3 \times 10^4 \frac{M}{M_{\odot}}. \quad (2.88)$$

2.5.2 La relation masse-luminosité

Les équations (2.66) avec leurs conditions aux limites lient implicitement le rayon et la luminosité de l'étoile à sa masse totale (théorème de Vogt-Russell). Elles suggèrent donc qu'il existe une relation univoque entre la masse de l'étoile et sa luminosité à paramètres du modèle constants (μ , C_p , ε_n , κ). On peut dégager une loi d'échelle en écrivant la densité de masse :

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi R^3} f\left(\frac{r}{R}\right), \quad (2.89)$$

où $f(x)$ est une fonction adimensionnelle définie sur l'intervalle $x \in [0, 1]$, telle que :

$$M = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r) = 3M \int_0^1 dx x^2 f(x) \Rightarrow \int_0^1 dx x^2 f(x) = \frac{1}{3}. \quad (2.90)$$

En particulier, $f(x) = 1$ pour une distribution de masse homogène. On a alors :

$$\mathcal{M}(r \leq R) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r) = 3MF_1\left(\frac{r}{R}\right), \quad (2.91)$$

où :

$$F_1(x) = \int_0^x du u^2 f(u), \quad (2.92)$$

est également une fonction adimensionnelle (comme tous les F_n introduits ci-dessous). Par conséquent,

$$\frac{dP}{dr}(r \leq R) = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} = G \frac{M^2}{R^5} F_2\left(\frac{r}{R}\right). \quad (2.93)$$

Si la pression reste dominée par la matière,

$$\frac{d}{dr}P(r) = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \left(\rho(r) \frac{d}{dr}T(r) + T(r) \frac{d}{dr}\rho(r) \right), \quad (2.94)$$

de sorte que :

$$T(r) = \frac{\mu G M}{\mathcal{R} R} F_3\left(\frac{r}{R}\right). \quad (2.95)$$

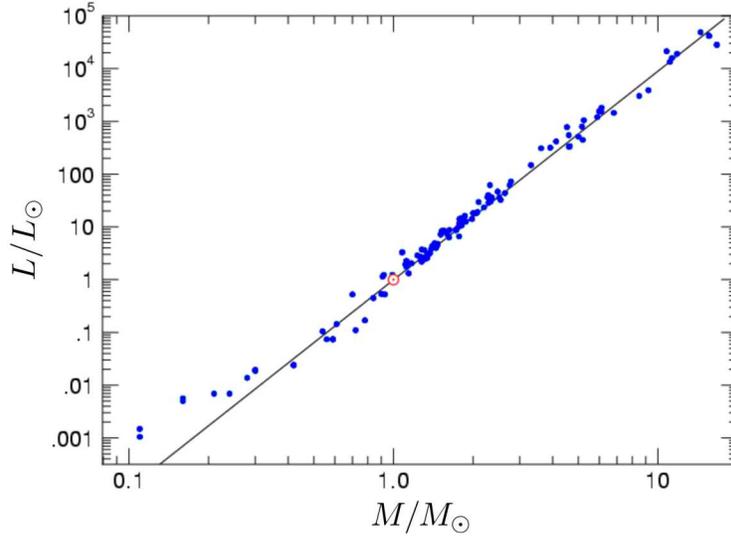


FIGURE 2.9 – Relation masse-luminosité pour les étoiles de la séquence principale de masse $M \approx 0.1 M_{\odot}$ à $M \approx 10 M_{\odot}$. Le point rouge est le Soleil.

Enfin, en supposant κ constant,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r) &= -\frac{64\pi\sigma}{3\rho(r)\kappa(r)} r^2 T(r)^3 \frac{d}{dr} T(r) \\ &= \frac{\sigma}{\kappa} \left(\frac{\mu G}{\mathcal{R}} \right)^4 M^3 F_4 \left(\frac{r}{R} \right). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Masse et luminosité devraient donc suivre la loi d'échelle :

$$L \equiv \mathcal{L}(R) \propto M^3. \quad (2.97)$$

En pratique, on mesure plutôt :

$$\frac{L}{L_{\odot}} \propto \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha}, \quad (2.98)$$

avec $\alpha \approx 3.5$ sur la séquence principale (voir Fig. 2.9)¹⁵. Les étoiles les plus lourdes, où le cycle CNO domine la fusion, s'écartent par le bas de cette tendance, alors qu'à l'inverse, les étoiles les plus légères, où prévaut la convection, s'en écartent pas le haut. Cette relation peut-être utilisée pour estimer la masse d'une étoile dont on a pu mesurer la magnitude absolue.

En outre, la relation masse-luminosité (2.98) et la luminosité d'Eddington (2.86) imposent une limite à la masse des étoiles, au delà de laquelle elles sont déstabilisées par la pression de radiation :

15. On peut d'ailleurs le vérifier sur les simulations des figures 2.7 et 2.8 : $L(10M_{\odot})/L(M_{\odot}) = 10^{3.73}$.

Type	Température	Couleur
O	> 25 000 K	Bleue
B	10 000 – 25 000 K	Bleue-blanche
A	7 500 – 10 000 K	Blanche
F	6 000 – 7 500 K	Jaune-blanche
G	5 000 – 6 000 K	Jaune (Soleil)
K	3 500 – 5 000 K	Orange
M	< 3 500 K	Rouge

TABLE 2.3 – Type spectral d'une étoile en fonction de sa température de couleur.

$$M < \left(\frac{4\pi cG}{\kappa_m} \frac{M_\odot^\alpha}{L_\odot} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \approx 65M_\odot. \quad (2.99)$$

Il faut cependant prendre garde aux nombreuses approximations faites dans la dérivation de ces expressions (hypothèse hydrostatique, exposant α indépendant de la masse...). Il existe de rares étoiles plus massives que cette limite, qui sont de fait assez instables et qui expulsent de grandes quantités de matière au cours de leur (bref) passage par la séquence principale.

Enfin, le « potentiel » thermonucléaire d'une étoile étant naturellement proportionnel à sa masse, son durée de vie moyenne sur la séquence principale varie comme :

$$t_{\text{sp}} \propto \frac{M}{L} \propto \frac{1}{M^{2.5}}. \quad (2.100)$$

2.5.3 Le diagramme de Hertzsprung-Russel

Il doit de même exister une relation masse/rayon pour les étoiles de la séquence principale ; puisque

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_c^4, \quad (2.101)$$

où $T_c \equiv T(R)$ est la température de couleur de l'étoile, il doit aussi exister une relation entre T_c et la masse, ou encore une relation entre L et T_c . Le diagramme L vs T_c est appelé diagramme de Hertzsprung-Russel (voir Fig. 2.10). Il permet de classer les étoiles par type spectral (couleur) et luminosité (deux quantités plus faciles à mesurer que la masse). La grande majorité des étoiles, qui passent l'essentiel de leur vie sur la séquence principale, forme une bande bien visible sur ce diagramme. Les différents types spectraux sont identifiés par une lettre (M, K, G, F, A, B, O du rouge au bleu, voir table 2.3).

Comme sur ce diagramme $L \propto T_c^6$ sur la séquence principale, et que $L \propto R^2 T_c^4 \propto M^3$, on en déduit empiriquement¹⁶ $T_c \propto R$ et $R \propto \sqrt{M}$. Les étoiles en dehors de la séquence principale sont sauf exception des étoiles évoluées (branche des géantes) qui ne brûlent plus de l'hydrogène qu'en coquille et/ou brûlent des éléments plus lourds que l'hydrogène (He, C, ...) dans le noyau, voir des cadavres stellaires (naïnes blanches).

16. Et on peut encore le vérifier sur les simulations des figures 2.7 et 2.8 : $R(10M_\odot)/R(M_\odot) = 10^{0.51}$ et $T_c(10M_\odot)/T_c(M_\odot) = 10^{0.68}$.

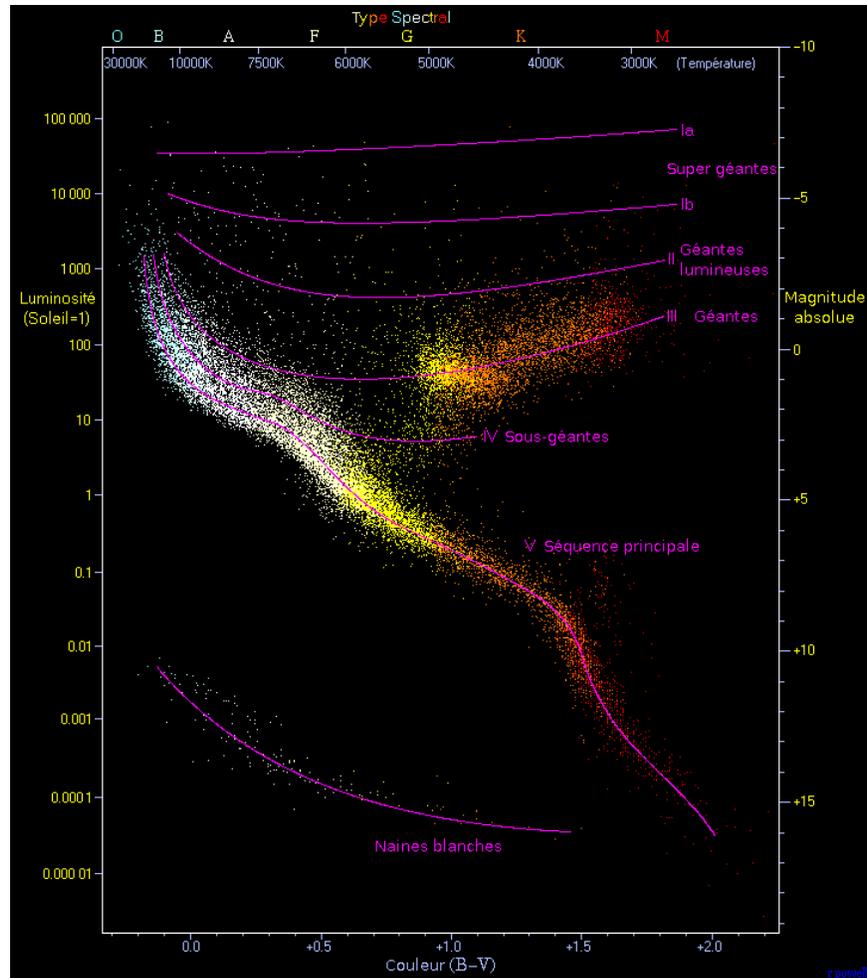


FIGURE 2.10 – Le diagramme température/luminosité de Hertzsprung-Russel [16].



3. Evolution des étoiles

A suivre...



Bibliographie

- ¹A. ACKER, *Astronomie Astrophysique*, 5^e édition (Dunod, Malakoff (France), 2019).
- ²Page Wikipedia sur le Soleil, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Soleil>, au 01/02/2023.
- ³Page Wikipedia sur l'équation de Lane-Emden, https://fr.wikipedia.org/wiki/Equation_de_Lane-Emden, au 01/05/2023.
- ⁴Page Wikipedia sur la chaîne proton-proton, https://fr.wikipedia.org/wiki/Chaîne_proton-proton, au 20/02/2023.
- ⁵Page Wikipedia sur le cycle CNO, https://fr.wikipedia.org/wiki/Cycle_carbone-azote-oxygene, au 20/02/2023.
- ⁶Page du « Solar center » de Standford sur les paramètres du Soleil, <http://solar-center.stanford.edu/vitalstats.html>, au 01/05/2023.
- ⁷Cours d'astrophysique de l'Université de Genève, https://www.unige.ch/sciences/astro/evolution/files/8215/1604/2513/cours_bases.pdf, au 01/03/2023.
- ⁸Cours d'astrophysique de Marc-Antoine Dupret (Université de Liège), <https://www.astro.uliege.be/~dupret/cours-1-2009-2.pdf>, au 01/02/2023.
- ⁹Page Wikipedia (anglaise) sur les lois de Kramers, https://en.wikipedia.org/wiki/Kramers%27_opacity_law, au 01/03/2023.
- ¹⁰Tables d'opacité et codes du projet OPAL, <http://https://opalopacity.llnl.gov/>, au 01/05/2023.
- ¹¹Cours d'astrophysique de Michael Richmond (Rochester Institute of Technology), <http://spiff.rit.edu/classes/phys370/lectures/statstar/statstar>, au 01/04/2023.
- ¹²Cours d'astrophysique de Philip Best (Université d'Edimbourg), https://www.roe.ac.uk/~pnb/teaching/stel_equations_2011.pdf, au 01/03/2023.
- ¹³Cours d'astrophysique de Paul C. Hewett (Université de Cambridge), https://people.ast.cam.ac.uk/~phewett/SandES2017/Lec2017_11.pdf, au 01/03/2023.

- ¹⁴J. F. DOORISH, “Approximating the solar/stellar energy generation rate, luminosity, and the hydrogen content”, *Astrophysics and Space Science* **214**, 19 (1994).
- ¹⁵*Page Wikipedia sur la photosphère du Soleil*, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Photosphere>, au 01/05/2023.
- ¹⁶*Page Wikipedia sur le diagramme de Hertzsprung-Russel*, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Hertzsprung-Russel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Hertzsprung-Russell), au 01/02/2023.